



REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan : EC00201931698, 4 Maret 2019

Pencipta

Nama : **Dr. Yosafat Aji Pranata, S.T., M.T.**
Alamat : **Komp. Duta Regensi Cihanjuang D14 Cibabat, Cimahi, Jawa Barat, 40513**
Kewarganegaraan : **Indonesia**

Pemegang Hak Cipta

Nama : **Universitas Kristen Maranatha**
Alamat : **Jl. Surya Sumantri No. 65, Bandung, Jawa Barat, 40164**
Kewarganegaraan : **Indonesia**
Jenis Ciptaan : **Diktat**
Judul Ciptaan : **Metode Elemen Hingga**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia : **3 Januari 2019, di Bandung**
Jangka waktu perlindungan : **Berlaku selama 50 (lima puluh) tahun sejak Ciptaan tersebut pertama kali dilakukan Pengumuman.**
Nomor pencatatan : **000136541**

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001





**UNIVERSITAS
KRISTEN
MARANATHA**

Fakultas Teknik

Jl. Prof. drg. Surya Sumantri, M.P.H. No. 65
Bandung - 40164, Jawa Barat, Indonesia
Telp: +62 22-201 2186 / 200 3450, ext. 1205
Fax: +62 22-201 7622
Email: ft@eng.maranatha.edu
www.maranatha.edu

SURAT TUGAS

Nomor: 044g/DFT/UKM/II/2020

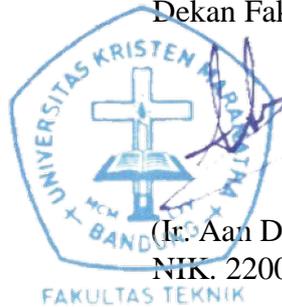
Yang bertanda tangan di bawah ini menugaskan kepada:

Nama: Dr. Yosafat Aji Pranata, S.T., M.T.
NIK/NIDN: 210293/0418097801
Unit Kerja: Fakultas Teknik - Universitas Kristen Maranatha
Melaksanakan Tugas: Membuat Diktat dengan Judul Elemen Hingga
Program Skema: Buku Ajar
Tempat Bertugas: Universitas Kristen Maranatha
Waktu Pelaksanaan: Semester Genap Tahun Akademik 2019/2020

Demikian surat tugas ini dibuat agar dapat dilaksanakan dengan penuh rasa tanggung jawab.
Atas perhatian dan kerja sama Bapak, kami ucapkan terima kasih.

Bandung, 4 Februari 2020

Dekan Fakultas Teknik



(Ir. Aan Darmawan, M.T.)
NIK. 220007

Tembusan : Yth, Kaprodi Teknik Sipil – Fakultas Teknik UK. Maranatha

(Surat Tugas)

Visi FT: Fakultas Teknik Universitas Kristen Maranatha dikenal secara nasional maupun internasional sebagai lembaga pendidikan keteknikan yang terkemuka, aktif berkontribusi dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi serta unggul dalam pengelolaannya berdasarkan kasih dan keteladanan Yesus Kristus.

Misi FT: Menyelenggarakan pendidikan, penelitian, dan pengabdian kepada masyarakat dengan budaya cendekia serta merespon tantangan kemajuan teknologi dalam menyiapkan sarjana teknik yang unggul dalam profesinya dengan keterampilan interpersonal yang tinggi.

METODE ELEMEN HINGGA

CE603 – 2 SKS

**Dosen Penanggung-jawab:
Dr. Yosafat Aji Pranata, ST., MT.**



**Program Studi Sarjana Teknik Sipil
Fakultas Teknik
Universitas Kristen Maranatha
2019**

PRAKATA

Puji dan syukur penyusun ucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas kesehatan yang diberikan dan rahmat-Nya, sehingga penyusun dapat menyelesaikan buku diktat kuliah “Metode Elemen Hingga”. Diktat kuliah dalam bentuk buku, wajib disiapkan oleh dosen sebagai bentuk tanggung-jawab akademik didalam melaksanakan proses belajar-mengajar. Selain itu dengan adanya wahana tertulis, diharapkan terdapat pertanggung-jawaban secara ilmiah terhadap isi dan materi matakuliah yang diberikan, tentunya disertai dengan sumber-sumber pustaka yang dijadikan acuan.

Penyusun mulai diberi tanggung-jawab mengajar matakuliah ini sejak Semester Genap Tahun Akademik 2011/2012. Namun demikian, penyusun telah mengenal teori metode elemen hingga sejak tahun 1998 dan mulai menerapkannya dalam aplikasi di lapangan (pekerjaan perencanaan struktur yang sebenarnya) sejak tahun 2005 sampai sekarang.

Metode elemen hingga merupakan suatu metode yang banyak dimanfaatkan untuk keperluan simulasi numerik didalam menyelesaikan berbagai permasalahan berkaitan dengan perencanaan struktur bangunan gedung, jembatan, maupun bangunan khusus. Oleh karena itu, metode elemen hingga merupakan matakuliah yang sangat menarik dan menjadi tantangan tersendiri bagi mahasiswa untuk dapat menempuh dan menjawab soal-soal baik latihan, kuis, responsi, maupun ujian secara tepat dan benar.

Dalam buku ini, dipelajari metode elemen hingga dengan batasan ruang lingkup yaitu kondisi dan perilaku material linier dan geometri linier.

Penyusun sadar dengan keterbatasan kemampuan yang dimiliki, sehingga buku ini tentu saja jauh dari sempurna. Oleh karena itu, segala kritik dan saran sangat diperlukan untuk perbaikan dan penyempurnaan buku pada edisi yang akan datang (versi selanjutnya). Segala kritik dan saran dapat disampaikan melalui e-mail yosafat.ap@gmail.com. Terima kasih. Tuhan memberkati.

Bandung, November 2019

Dr. Yosafat Aji Pranata, ST., MT.

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Prakata	ii
Daftar Isi	iii
Bab 1 Pendahuluan	1
1.1 Metode Elemen Hingga	1
1.2 Aplikasi Metode Elemen Hingga	4
1.3 Perkembangan Metode Elemen Hingga	9
1.4 Dasar-dasar Mekanika Komputasi	10
1.4.1 Statik dan Dinamik	11
1.4.2 Linier dan Nonlinier	11
1.4.3 Metode Diskretisasi	12
1.4.4 Variasi Metode Elemen Hingga	12
1.5 Teori Elastisitas	12
1.6 Hubungan Regangan dengan Peralihan	15
1.7 Hubungan Tegangan dengan Regangan	16
1.8 Referensi	17
Bab 2 Pengantar Metode Elemen Hingga	19
2.1 Terminologi	19
2.2 Idealisasi	19
2.3 Diskretisasi	21
2.4 Metode Elemen Hingga	23
2.5 Klasifikasi Elemen Mekanis	24
2.6 Kondisi Batas	25
2.7 Referensi	26
Bab 3 Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi	27
3.1 Pendahuluan	27
3.2 Elemen Batang	27
3.3 Elemen Balok	29
3.4 Elemen Batang dan Balok pada Orientasi Sembarang	31
3.4.1 Elemen Batang	32
3.4.2 Elemen Balok	33
3.5 Perakitan Elemen	34
3.6 Beban Mekanis dan Tegangan-Tegangan	37
3.7 Struktur Simetri	38
3.8 Soal	39
3.9 Referensi	52
Bab 4 Elemen-Elemen Dasar	53
4.1 <i>Preliminary</i>	53

4.1.1 Hubungan Tegangan dengan Regangan	53
4.1.2 Hubungan Regangan dengan Peralihan	54
4.1.3 Kompatibilitas	56
4.1.4 Persamaan Keseimbangan	56
4.1.5 Kondisi Batas	57
4.1.6 Solusi Pendekatan dan Solusi Eksak	57
4.2 Interpolasi dan Bentuk Fungsi	58
4.2.1 Derajat Kontinuitas	58
4.2.2 Interpolasi C^0	59
4.2.3 Interpolasi C^1	60
4.3 Persamaan untuk Matriks Elemen	61
4.3.1 Elemen Batang	
4.3.2 Elemen Balok	
4.4 Elemen Segitiga Linier (CST)	
4.5 Elemen Segitiga Kuadratik (LST)	
4.6 Elemen Segiempat Bilinier (Q4)	
4.7 Elemen Segiempat Kuadratik (Q8 dan Q9)	
4.8 Elemen <i>Solid</i> Persegi	
4.9 Pemilihan Fungsi Interpolasi	
4.10 Soal	
4.11 Referensi	
Bab 5 Pengantar Teknik Formulasi	
5.1 Metode Variasional	
5.2 Metode Galerkin	
5.3 Referensi	
Bab 6 Elemen-Elemen Isoparametrik	
6.1 Pendahuluan	
6.2 Elemen Kuadrilateral Bilinier (Q4)	
6.3 Elemen Kuadrilateral Bikuadratik (Q8 dan Q9)	
6.4 Elemen Isoparametrik Heksahedral	
6.5 Ragam yang Tidak Kompatibel	
6.6 Kondensasi Statik	
6.7 Pemilihan dalam Teknik Integrasi Numerik	
6.8 Pertimbangan Beban	
6.9 Perhitungan Tegangan	
6.10 Efek dari Geometri Elemen	
6.11 Validitas Elemen Isoparametrik	
6.12 Soal	
6.13 Referensi	
Bab 7 Transformasi Koordinat	
7.1 Pendahuluan	
7.2 Transformasi Properti Material, Tegangan, dan Regangan	
7.3 Integrasi Analitis, Koordinat Volume dan Luas	
7.4 Integrasi Numerikal	
7.5 Soal	

7.6 Referensi

Bab 8 *Error, Estimasi Error, dan Konvergensi*

8.1 Sumber *Error*

8.2 Kondisi *Ill*

8.3 Nomor Kondisi

8.4 Tes *Decay* Diagonal

8.5 Residu

8.6 Diskretisasi *Error*

8.7 Ekstrapolasi *Multi-mesh*

8.8 Metode Revisi *Mesh*

8.9 Soal

8.10 Referensi

Pustaka

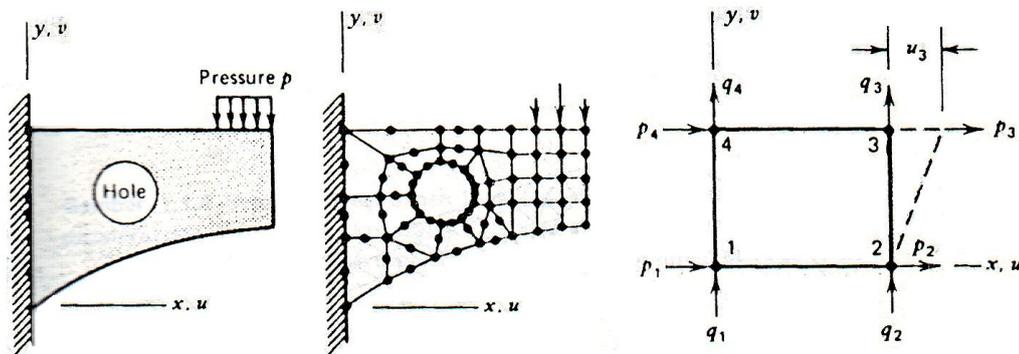
Lampiran

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga adalah prosedur numerik yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah mekanika kontinum dengan tingkat ketelitian yang dapat diterima. Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 1.1, yaitu suatu struktur (bidang) dengan lubang, beban yang bekerja adalah tekanan (*pressure*). Untuk menyelesaikan masalah ini diperlukan solusi numerik. Gambar 1.1b memperlihatkan model elemen hingga. Elemen-elemen berbentuk segitiga (*triangle*) dan kuadrilateral (*quadrilateral*) merupakan beberapa contoh tipe elemen hingga. Titik-titik hitam disebut titik nodal (*node*). Suatu jaring (*mesh*) adalah susunan yang terdiri dari titik nodal dan elemen [1].



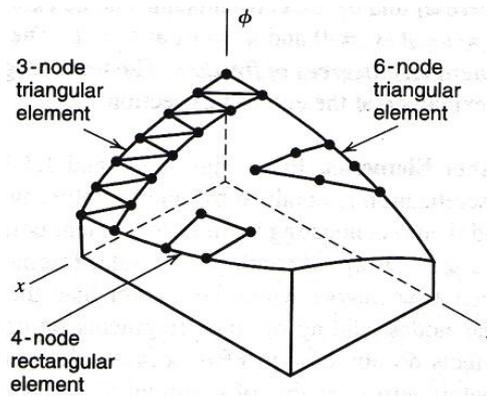
(a). Struktur actual (b). Model elemen hingga. (c). Elemen segiempat bidang.

Gambar 1.1 Struktur aktual dan model elemen hingga [1].

Pada dasarnya, elemen hingga merupakan bagian-bagian kecil dari struktur aktual (sebenarnya). Elemen hingga harus dapat berdeformasi dengan cara yang terbatas. Sebagai contoh apabila ujung-ujung elemen dikendalikan untuk tetap lurus, maka elemen yang bersebelahan dengannya tidak akan tumpang tindih maupun terpisahkan (Gambar 1.1c).

Untuk memformulasikan suatu elemen, harus dicari dan dihitung terlebih dahulu gaya-gaya titik nodal (*nodal forces*) yang menghasilkan berbagai ragam deformasi elemen. Teori yang digunakan, sebagai contoh yaitu balok (*beam*) atau batang (*bar*). Untuk elemen-elemen yang didefinisikan pada Gambar 1.1b dan Gambar 1.1c, akan dipelajari pada buku ini.

Metode elemen hingga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan bagaimana permukaan suatu benda yang tidak datar, sebagai contoh permukaan Φ yang berubah secara halus (Gambar 1.2), ternyata dapat didekati dengan permukaan dengan permukaan yang datar. Elemen dengan jumlah empat titik nodal dan delapan titik nodal, yang masing-masing diperlihatkan dengan permukaan terpilin dan lengkung, merupakan teknik pendekatan tersebut. Pendekatan akan semakin baik apabila elemen yang digunakan semakin banyak.



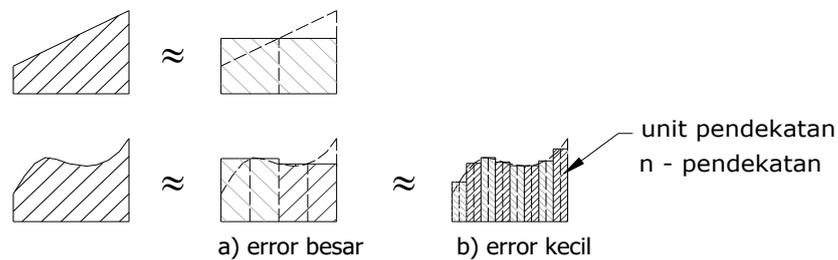
Gambar 1.2 Fungsi kombinasi $\Phi = \Phi(x,y)$ dan elemen tipikal pendekatan [1].

Didalam suatu elemen segiempat (Gambar 1.2), Φ adalah fungsi linier dari x dan y . elevasi dan inklinasi elemen dapat didefinisikan dengan tiga nilai titik nodal dari Φ . Dua elemen tidak harus mempunyai elevasi dan kemiringan yang sama. Ilustrasi ini memperlihatkan esensi dari metode elemen hingga, yaitu pendekatan bagian demi bagian untuk fungsi Φ dengan menggunakan polinomial, yang mana masing-masing terdefinisi pada elemen yang kecil dan dinyatakan dalam nilai-nilai titik nodal dari fungsi tersebut [1].

Untuk permasalahan struktur dengan bentuk geometri dan pembebanan yang kompleks, hal ini tidak dapat diselesaikan dengan persamaan diferensial parsial, namun dapat diselesaikan dengan metode numerik pendekatan metode elemen hingga. Daerah yang dianalisis dapat mempunyai bentuk, beban, dan

kondisi batas sembarang. Elemen-elemen kecilnya dapat terdiri atas elemen yang berbeda jenis, bentuk dan besaran fisiknya. Kemudahan penggunaan berbagai hal tersebut bisa saja tergabung pada satu program komputer, yaitu dengan menyiapkan data jenis, geometri, kondisi batas, elemen, dan sebagainya.

Keunggulan lain adalah adanya arti fisik yang cukup dekat antara elemen-elemen kecil (jaring elemen) dengan struktur aktualnya. Metode elemen hingga mempunyai kelemahan yaitu hasilnya berupa hasil numerik, tidak ada persamaan bentuk tertutup yang dapat dipakai untuk kasus serupa yang hanya berbeda parameternya.



Gambar 1.3 Pendekatan menghitung suatu luas bidang.

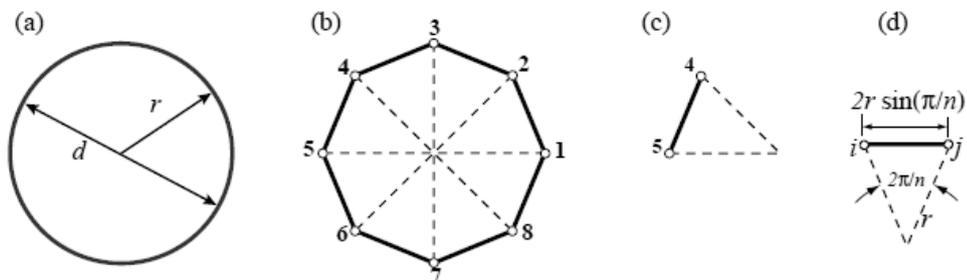
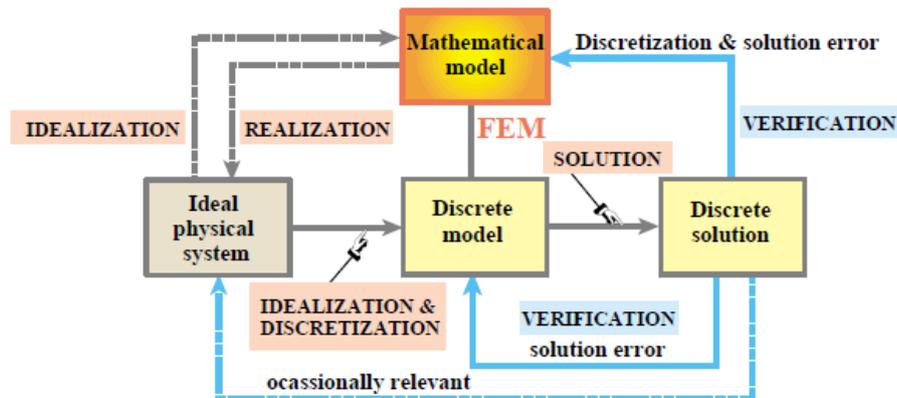


FIGURE 1.1. The “find π ” problem treated with FEM concepts: (a) continuum object, (b) a discrete approximation by inscribed regular polygons, (c) disconnected element, (d) generic element.

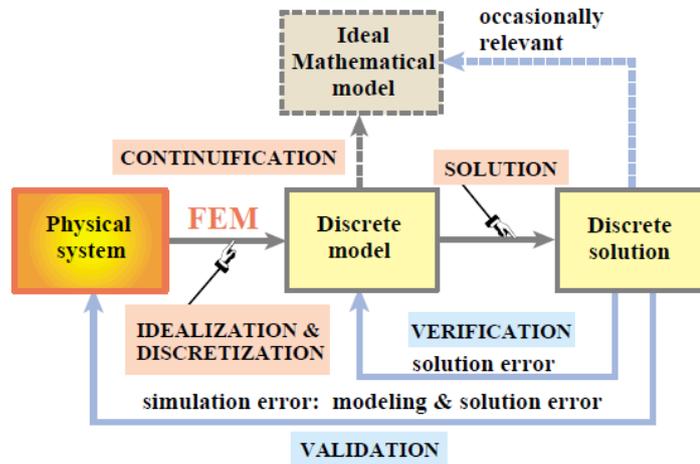
n	$\pi_n = n \sin(\pi/n)$	Extrapolated by Wynn- ϵ	Exact π to 16 places
1	0.0000000000000000		
2	2.0000000000000000		
4	2.828427124746190	3.414213562373096	
8	3.061467458920718		
16	3.121445152258052	3.141418327933211	
32	3.136548490545939		
64	3.140331156954753	3.141592658918053	
128	3.141277250932773		
256	3.141513801144301	3.141592653589786	3.141592653589793

Gambar 1.4 Ilustrasi pendekatan diskret nilai π [2].

Metode elemen hingga merupakan salah satu metode diskretisasi ruang atau *spatial discretization method* [2]. Metode elemen hingga (dalam aplikasi praktis disebut pula analisis elemen hingga) adalah teknik numerik untuk mendapatkan solusi pendekatan (*approximate*) dari suatu persamaan diferensial parsial dan persamaan integral. Menurut Felippa [2], proses simulasi metode elemen hingga dapat diklasifikasikan menjadi dua model, yang pertama adalah model matematika (Gambar 1.5a) dan yang kedua adalah model fisik (Gambar 1.5b).



(a). Ilustrasi proses simulasi "mathematical model" metode elemen hingga.



(b). Ilustrasi proses simulasi "physical model" metode elemen hingga.

Gambar 1.5 Simulasi metode elemen hingga [2].

1.2 Aplikasi Metode Elemen Hingga

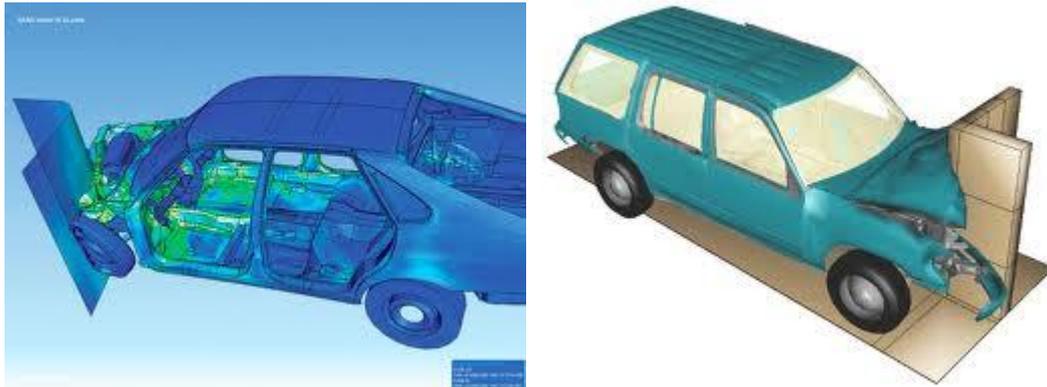
Metode elemen hingga (*finite element method* atau FEM) dalam konteks dan aplikasi praktis sering pula disebut *finite element analysis* atau FEA. Metode

elemen hingga merupakan teknik numerik untuk mendapatkan solusi pendekatan dari suatu persamaan diferensial parsial (*partial differential equations* atau PDE) seperti halnya persamaan integral. Pendekatan solusi berbasis mengeliminasi persamaan diferensial kompleks (permasalahan *steady state*), atau memberikan PDE menjadi sistem pendekatan persamaan diferensial biasa, yang mana selanjutnya dapat diintegrasikan secara numerik menggunakan teknik standar, sebagai contoh metode Euler, Runge-Kutta, dan lain-lain [7].

Pada suatu penyelesaian persamaan diferensial parsial, tantangan utama adalah menciptakan persamaan pendekatan yang berhubungan dengan persamaan yang sedang dipelajari, yang mana stabil secara numerik, dalam arti kesalahan (*error*) yang dihasilkan atau yang mungkin terjadi tidak memberikan pengaruh secara signifikan. Metode elemen hingga merupakan pilihan yang tepat untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial parsial dalam domain yang kompleks, ketika domain berubah, ketika presisi yang diinginkan bervariasi dari seluruh domain, atau ketika menghadapi kondisi kurang-halusnya suatu solusi pendekatan [7].

Sebagai contoh, simulasi tabrakan frontal suatu mobil dalam kaitannya dengan uji keselamatan pengguna kendaraan dan kekuatan kendaraan, sangat memungkinkan menerapkan ilmu metode elemen hingga, dalam hal ini berupa simulasi numerik untuk mendapatkan prediksi yang akurat berkaitan dengan faktor-faktor penting yang sedang dipelajari. Dengan adanya simulasi numerik menggunakan komputer, maka biaya pengujian simulasi secara empiris (pengujian di laboratorium dengan benda uji mobil yang sebenarnya) dapat dikurangi. Dapat dibayangkan apabila setiap pengujian harus menggunakan benda uji yang sebenarnya, maka berbagai percobaan berkaitan dengan keselamatan pengguna kendaraan dan kekuatan suatu kendaraan akan membutuhkan biaya yang sangat luar biasa tinggi.

Peran simulasi numerik dalam hal ini dapat “mewakili” pengujian empiris tersebut, sehingga dapat diperoleh hasil-hasil penting berkaitan dengan permasalahan yang sedang ditinjau. Selanjutnya untuk membuktikan secara data dan fakta empiris, baru dilakukan pengujian yang sebenarnya di laboratorium, untuk mem-validasi hasil simulasi numerik tersebut.



Gambar 1.6 Simulasi tabrakan kendaraan untuk mempelajari faktor-faktor kekuatan dan keamanan [8,9].

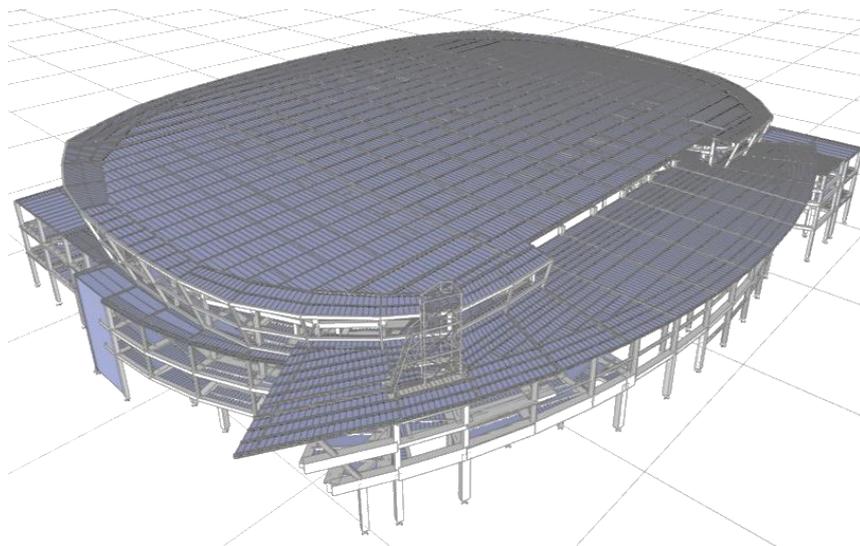
Metode Elemen Hingga dewasa ini telah menjadi bagian tak terpisahkan dari solusi numerik di dunia teknik/rekayasa. FEM diaplikasikan secara luas mulai dari analisis *stress* (tegangan) dan *deformasi* (perubahan bentuk) pada bidang struktur bangunan, jembatan, penerbangan, dan otomotif, sampai pada analisis aliran fluida, perpindahan panas, medan magnet, dan masalah non-struktur lainnya [10]. Kemajuan yang sangat pesat di bidang komputer baik perangkat lunak maupun perangkat keras telah menyebabkan FEM diterapkan secara masif pada level yang belum pernah dibayangkan sebelumnya. Dengan kecanggihan komputer sekarang, masalah rekayasa yang rumit dapat dimodelkan dengan relatif mudah. Waktu yang diperlukan untuk memecahkan problem pun semakin singkat. Penggunaan CAE (*Computer Aided Engineering*) semakin mendapatkan tempat di dunia manufaktur karena memberikan banyak keuntungan dan kemudahan, antara lain sebagai berikut:

1. Mengurangi frekuensi uji coba produk. Pengurangan jumlah uji coba berakibat langsung pada pengurangan biaya untuk pengembangan produk baru dan pengurangan waktu penelitian dan pengembangan produk. Untuk uji coba diperlukan prototipe produk. Harga sebuah prototipe produk yang belum diproduksi massal adalah sangat tinggi, sebagai contoh, salah satu standar uji kelayakan mobil penumpang adalah performa pada saat tabrakan. Apabila uji coba tabrakan mobil dilakukan berkali-kali, tentu saja biaya yang dibutuhkan sangat besar. Selain itu, untuk membuat satu prototipe diperlukan waktu yang tidak singkat, semakin banyak prototipe yang harus dibuat, maka akan

semakin lama waktu yang harus disediakan untuk penelitian dan pengembangan produk tersebut.

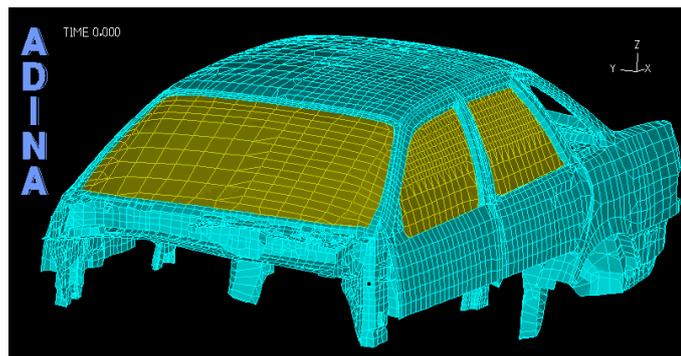
2. Meningkatkan kualitas produk dengan memanfaatkan CAE suatu produk yang diuji secara virtual. Pada uji virtual banyak kondisi yang bisa dikaji, termasuk kondisi-kondisi yang sulit dilaksanakan pada uji coba riil. Misalnya bagaimana bila sebuah kotak hitam pesawat terjatuh ke dalam laut dalam, yaitu apakah konstruksi kotak hitam tersebut dapat menahan tekanan yang sangat besar. Uji coba langsung seperti ini hanya bisa dilaksanakan di laboratorium-laboratorium khusus, namun uji coba virtualnya bisa dilakukan dengan mudah. Proses uji coba virtual seperti ini bila dilakukan dengan benar dan menggunakan model yang tepat, hasilnya akan mendekati kebenaran riil. Tentu saja, pada tahap akhir tetap harus dilakukan uji coba (untuk benda uji tertentu) yang sebenarnya untuk memastikan performa suatu produk.

Beberapa perangkat lunak metode elemen hingga komersial yang berkembang pada saat ini yaitu antara lain SAP2000, ADINA, ANSYS, dan ABAQUS [3,4,5,6]. Perangkat lunak SAP2000 dapat digunakan untuk simulasi numerik model struktur dengan kondisi material dan geometri linier, sedangkan perangkat lunak ADINA, ANSYS, dan ABAQUS dapat digunakan untuk simulasi numerik model struktur dengan kondisi material linier/nonlinier dan geometri linier/nonlinier.

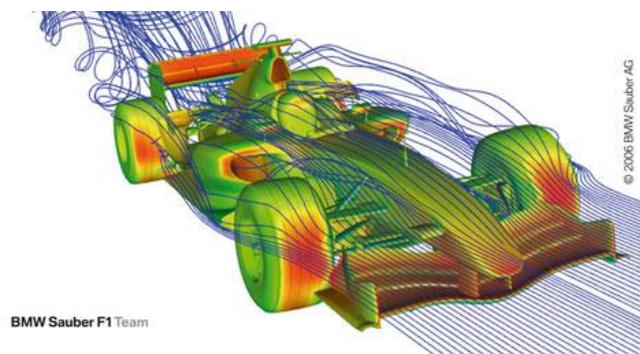


Gambar 1.7 Simulasi numerik struktur stadion dengan SAP2000 [6].

Gambar 1.7 memperlihatkan simulasi numerik untuk mengetahui kekuatan dan kekakuan struktur stadion dengan SAP2000 [6]. Dengan menggunakan simulasi numerik, maka dapat diketahui tingkat kekuatan dan kekakuan struktur didalam memikul beban-beban yang bekerja. Gambar 1.8 memperlihatkan simulasi numerik dengan kondisi geometri nonlinier dan material nonlinier suatu kendaraan dengan menggunakan perangkat lunak ADINA [4].



Gambar 1.8 Simulasi numerik kerangka kendaraan dengan ADINA [4].



Gambar 1.9 Simulasi numerik mobil balap F1 dengan ANSYS [5].

Gambar 1.9 memperlihatkan simulasi numerik berkaitan dengan *reliability* suatu mobil balap F1 terhadap beban angin dengan perangkat lunak ANSYS [5]. Sedangkan Gambar 1.10 memperlihatkan secara skematik simulasi numerik sistem struktur rangka suatu jembatan akibat adanya beban-beban yang bekerja, dengan menggunakan perangkat lunak ABAQUS [3]. Hal ini sangat penting untuk mengetahui perilaku struktur yang sebenarnya, manakala hendak maupun sudah dibangun.



Gambar 1.10 Simulasi numerik struktur jembatan rangka dengan ABAQUS [3].

1.3 Perkembangan Metode Elemen Hingga

Pada tahun 1906 dan tahun-tahun berikutnya, para ahli riset mengusulkan metode analogi *lattice* untuk memecahkan masalah kontinum. Disini suatu kontinum didekati dengan jaring yang teratur yang terbentuk oleh batang-batang elastis. Selanjutnya metode ini berkembang menjadi metode untuk menganalisis struktur rangka. Pada tahun 1941, seorang ahli matematik Courant (dalam publikasi yang ditulis tahun 1943) mengusulkan interpolasi polinomial bagian-demi-bagian pada daerah segitiga, sebagai cara untuk mendapatkan solusi numerik pendekatan. Courant memperkenalkan metodenya sebagai solusi Rayleigh-Ritz untuk masalah variasional. Pada mulanya metode ini dilupakan orang, sampai suatu saat kemudian para rekayasawan berhasil mengembangkannya. Pada waktu itu pendapat para ahli masih dianggap tidak praktis karena belum ada komputer yang dapat dipakai untuk melakukan perhitungan [1].

Setelah tahun 1953, para rekayasawan menuliskan persamaan kekakuan dalam notasi matriks dan dapat memecahkan persamaan tersebut dengan menggunakan bantuan komputer digital. Makalah klasik yang ditulis oleh Turner, Clough, Martin, dan Topp diterbitkan pada tahun 1956. Sejak itu terjadi kemajuan pesat dalam pengembangan metode elemen hingga dalam bidang rekayasa. Nama elemen hingga disebutkan pertama kali pada tahun 1960. Pada tahun 1961 telah diterbitkan sepuluh makalah mengenai elemen hingga, pada tahun 1966 terbit 134

makalah, dan pada tahun 1971 terbit 844 makalah. Pada tahun 1979 jumlah publikasi elemen hingga mencapai lebih dari 7000 makalah.

1.4 Dasar-Dasar Mekanika Komputasi [2]

Lingkup dari mekanika dapat dibagi menjadi tiga ruang lingkup utama, yaitu teoritis (*theoretical*), aplikasi (*applied*), dan komputasi (*computational*). Mekanika teoritis berhubungan dengan hukum-hukum fundamental dan prinsip dasar mekanika yang dipelajari berkaitan dengan nilai-nilai ilmiah intrinsik. Mekanika aplikasi mentransfer pengetahuan teoritis menjadi aplikasi teknik dan ilmiah, secara khusus berhubungan dengan fenomena fisik dan model matematika suatu konstruksi (sebagai contoh bangunan dan jembatan). Mekanika komputasi menyelesaikan permasalahan-permasalahan spesifik dengan model simulasi numerical menggunakan komputer.

Beberapa subbagian dari mekanika komputasi (jika ditinjau dari segi skala fisik) yaitu antara lain mekanika nano dan mekanika mikro (*nanomechanics and micromechanics*), mekanika continuum (*continuum mechanics: solids and structures, fluids, multiphysics*), dan sistem (*system*).

Mekanika nano berkaitan dengan fenomena dengan tinjauan tingkat/level molekular dan atom, sebagai contoh berhubungan dengan partikel kimia dan fisika. Mekanika mikro berkaitan dengan tingkat/level kristalografik dan granular, berkaitan dengan aplikasi terhadap desain dan fabrikasi suatu material dan *microdevice*.

Mekanika continuum mempelajari suatu bodi pada level makroskopik, menggunakan model kontinum yaitu struktur mikro diasumsikan homogen (secara *phenomenological averages*). Dua tradisi lingkup dari aplikasi mekanika adalah mekanika *solid* dan mekanika *fluid*. Teknik komputasi pada mekanika *solid* menggunakan pendekatan ilmu pengetahuan aplikasi dalam analisis dan desain suatu struktur. Sedangkan teknik komputasi pada mekanika fluida (*fluid*) berhubungan dengan persamaan keseimbangan dan gerak dari *liquid* dan gas. Termasuk dalam lingkup mekanika fluida adalah antara lain hidrodinamika, aerodinamika, akustik, fisik atmosfer, kejut (*shock*). Multifisika merupakan suatu

ilmu pengetahuan yang relatif masih baru, yaitu sistem mekanika yang mempelajari interaksi antara struktur dan fluida.

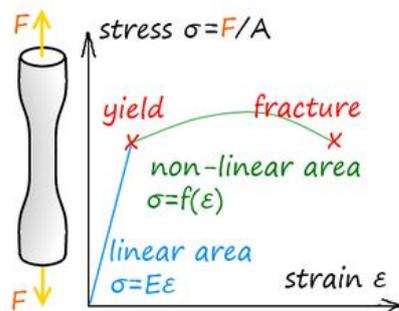
Yang terakhir adalah sistem, merupakan identifikasi dari objek mekanika, baik itu buatan maupun natural, sebagai contoh pesawat, bangunan, jembatan, mesin, mobil, teleskop, robot (buatan); dan amuba, pohon, ekologi, astronomi, kosmologi (natural).

1.4.1 Statik dan Dinamik [2]

Permasalahan berkaitan dengan mekanika kontinum dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu statik (statika) dan dinamik (dinamika). Statik artinya tidak bergantung terhadap waktu (sebagai contoh pembebanan pada suatu struktur). Dinamik artinya secara aktual tergantung terhadap waktu, sebagai contoh gaya-gaya dalam dan deformasi yang terjadi pada struktur akan berbeda/berubah sesuai waktu pembebanan.

1.4.2 Linier dan Nonlinier [2]

Problem yang berkaitan dengan masalah statika dibagi menjadi dua bagian, yaitu linier dan nonlinier. Analisis statika linier berhubungan dengan permasalahan dan respon linier, sebagai contoh apabila suatu struktur dibebani oleh suatu beban yang digandakan (dua kali lipat beban semula), maka deformasi dan gaya-gaya dalam yang terjadi pun akan menjadi dua kali lipat semula. Sedangkan pada permasalahan statika nonlinier, persamaan-persamaan yang dibahas merupakan pangkat lebih dari satu.

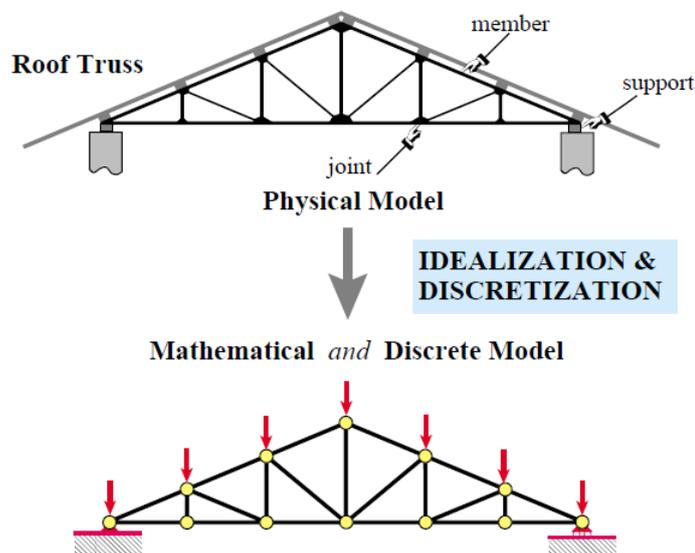


Gambar 1.11 Linier dan Nonlinier [11].

1.4.3 Metode Diskretisasi [2]

Metode diskretisasi model matematika kontinum, sebagai contoh adalah dengan mengkonversi suatu model diskret dengan jumlah hingga (*finite number*) suatu derajat kebebasan (*degree of freedom*). Metode diskretisasi spasial terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu antara lain:

1. Elemen hingga (FEM).
2. Elemen batas (*boundary element method* atau BEM).
3. *Finite Difference Method* (FDM).
4. *Finite Volume Method* (FVM).



Gambar 1.12 Model diskret suatu struktur rangka atap [2].

1.4.4 Variasi Metode Elemen Hingga [2]

Teknik metode elemen hingga secara umum diklasifikasikan menjadi dua bagian, yaitu formulasi FEM dan solusi FEM. Formulasi FEM yaitu berhubungan dengan deformasi, keseimbangan, gabungan, dan hibrida. Sedangkan Solusi FEM yaitu kekakuan, fleksibilitas, maupun gabungan keduanya.

1.5 Teori Elastisitas

Teori elastisitas dapat digunakan untuk memahami pengertian metode elemen hingga. Gambar 1.13 memperlihatkan elemen yang sangat kecil (*differential element*), bukan elemen hingga. Gaya-gaya benda F_x dan F_y

mempunyai dimensi gaya per satuan volume dan dapat berasal dari gravitasi, percepatan, medan magnetic, dan sebagainya. Gaya-gaya tersebut bernilai positif apabila bekerja dalam arah koordinat positif. Pada setiap satuan volume atau disebut ($dV = 1 dx dy$), F_x dan F_y menyebabkan gaya-gaya total $F_x dV$ dan $F_y dV$. Pada umumnya tegangan merupakan fungsi dari koordinat. Dengan demikian, sebagai contoh, $\sigma_{x,x}$ adalah laju perubahan σ_x terhadap x , dan $\sigma_{x,x} dx$ merupakan perubahan σ_x pada jarak dx . Keseimbangan gaya-gaya dalam arah x harus terpenuhi, yaitu sebagai berikut,

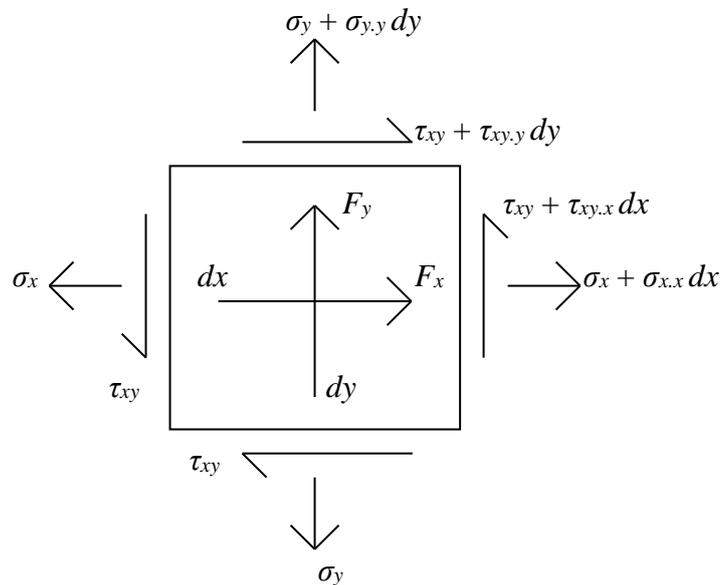
$$\begin{aligned} \sigma_x t dy - \tau_{xy} t dx + (\sigma_x + \sigma_{x,x} dx)t dy & \quad (1.1) \\ + (\tau_{xy} + \tau_{xy,y} dy)t dx + F_x t dx dy = 0 & \end{aligned}$$

Dalam arah y pun harus terpenuhi persamaan keseimbangannya. Keduanya diperlihatkan dalam bentuk yang lebih sederhana pada Gambar 1.14.

Persamaan diferensial keseimbangannya adalah sebagai berikut,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + F_x = 0 \quad (1.2a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y = 0 \quad (1.2b)$$



Gambar 1.13 Tegangan dan gaya benda per satuan volume yang bekerja pada suatu elemen bidang yang sangat kecil.

Dalam konteks 3 (tiga) dimensi, vektor gaya badan adalah sebagai berikut,

$$\{F\} = \{F_x \quad F_y \quad F_z\} \quad (1.3)$$

Persamaan diferensial keseimbangannya adalah sebagai berikut,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} + F_x = 0 \quad (1.4a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + F_y = 0 \quad (1.4b)$$

$$\tau_{zx,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z = 0 \quad (1.4c)$$

Apabila benda elastis mengalami deformasi, maka diasumsikan tidak terjadi retak, tidak terjadi tumpang-tindih (*overlap*) pada bagian-bagiannya, atau disebut kondisi keserasian (*compatibility conditions*) harus terpenuhi, dimana medan peralihan menerus (*continuous*) dan berharga tunggal (*single valued*).

Kondisi batas (*boundary condition*) harus diberlakukan terhadap tegangan dan peralihan. Kondisi ini merupakan bagian dari definisi masalah. Sebagai contoh penerapan kondisi batas, adalah diilustrasikan pada Gambar 1.1, yaitu tepi bagian kiri (tumpuan) tidak bergerak (yaitu pada $x = 0$, maka $u = v = 0$) walaupun tekanan (*pressure*) bekerja. Contoh lain dari penerapan kondisi batas, apabila peralihan diketahui, maka tegangan merupakan bilangan yang belum diketahui (*unknown*), demikian pula sebaliknya.

Apabila medan peralihan atau tegangan memenuhi keseimbangan, keserasian, dan kondisi batas, maka solusinya dapat diperoleh. Apabila perilaku beban terhadap responsnya berupa fungsi linier, maka solusinya adalah tunggal.

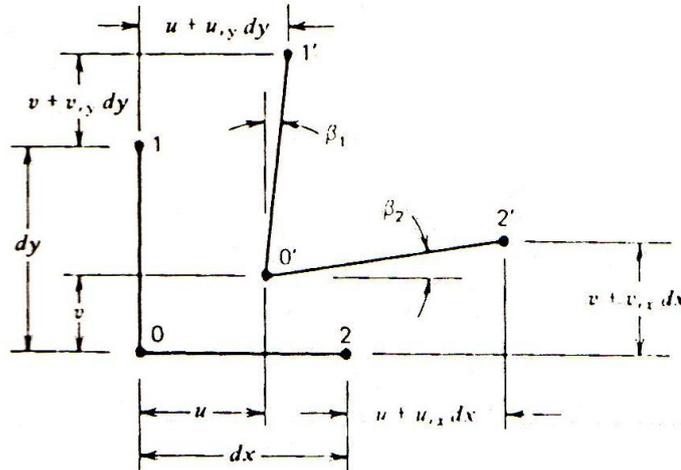
Dalam konteks metode elemen hingga, apabila elemen diadakan berdasarkan medan peralihan, yang berarti peralihan titik kumpul merupakan *unknown* utama, maka kondisi keserasian akan terpenuhi di dalam elemen. Jika medan yang dipilih sesuai, akan berarti juga ada keserasian antara elemen, juga memenuhi kondisi batas peralihan.

Persamaan keseimbangan dan kondisi batas mengenai tegangan yang diperoleh hanya merupakan pendekatan. Pendekatan ini akan semakin baik apabila derajat kebebasan (*degree of freedom*) yang digunakan semakin banyak, yang mana berarti bahwa akan semakin banyak proses penghitungannya.

Pemahaman lebih lanjut mengenai teori elastisitas dapat dipelajari secara mandiri dari sumber-sumber pustaka berupa buku-buku elastisitas.

1.6 Hubungan Regangan dengan Peralihan

Regangan adalah perubahan panjang terhadap panjang mula-mula. Hubungan antara regangan dengan peralihan merupakan yang penting dalam proses pembentukan suatu elemen.



Gambar 1.14 Peralihan dan distorsi panjang \$dx\$ dan \$dy\$.

Gambar 1.14 memperlihatkan bahwa medan regangan yang umum menyebabkan perubahan konfigurasi 012 menjadi 0'1'2'. Seperti halnya tegangan-regangan pada Gambar 1.14, peralihan \$u\$ dan \$v\$ merupakan fungsi dari koordinat. Diasumsikan bahwa inkremen seperti \$u_x\$ sangat kecil dibandingkan \$u\$ dan \$v\$.

$$\epsilon_x = \frac{L_{0'2'} - L_{02}}{L_{02}} = \frac{\{dx + (u + u_x dx) - u\} - dx}{dx} = u_x \quad (1.5)$$

Analisis yang serupa akan menghasilkan regangan normal pada arah \$y\$.

$$\epsilon_y = v_y \quad (1.6)$$

Regangan geser adalah besarnya perubahan sudut. Karena inkremen peralihan sangat kecil, maka \$\beta_1 = \tan \beta_1\$, dan \$\beta_2 = \tan \beta_2\$, sehingga persamaan regangan geser adalah sebagai berikut,

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{(u + u_x dy) - u}{dy} + \frac{(v + v_x dx) - v}{dx} = u_x + v_x \quad (1.7)$$

Hubungan regangan-peralihan dapat dinyatakan dalam bentuk matriks baik dalam konteks 2 (dua) dimensi maupun 3 (tiga) dimensi sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1.8a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.8b)$$

1.7 Hubungan Tegangan dengan Regangan

Hubungan tegangan-regangan dapat ditulis secara umum dalam persamaan sebagai berikut,

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (1.9a)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (1.9b)$$

$$[E] = [C]^{-1} \quad (1.9c)$$

yang mana $[C]$ adalah matriks besaran-besaran material, $[E]$ adalah matriks kekakuan material.

Tipe material yang dikenal secara luas, antara lain isotropik dan ortotropik. Material isotropik adalah material dengan besaran properti sama pada ketiga arah utamanya yang saling tegaklurus. Sebagai contoh material beton dan baja.

Sedangkan material ortotropik adalah material dengan besaran properti berbeda-beda pada masing-masing arah utamanya yang saling tegaklurus. Sebagai contoh adalah material kayu. Kayu mempunyai properti mekanis berbeda pada masing-masing sumbu utamanya.

Secara detail, Persamaan 1.9a (untuk material ortotropik) dapat dituliskan kedalam persamaan sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{RL}}{E_y} & \frac{-\nu_{TL}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_x} & \frac{-\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Dimana terdapat hubungan yaitu,

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad (1.11a)$$

$$\frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \quad (1.11b)$$

$$\frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y} \quad (1.11c)$$

Untuk material isotropik, karena besaran properti pada semua arah utamanya adalah sama, maka $E_x = E_y = E_z = E$, demikian pula berlaku untuk masing-masing nilai untuk G dan ν , serta untuk material isotropik berlaku persamaan,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.12)$$

1.8 Referensi

1. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
2. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.

3. url: http://www.abacom.de/products/abaqus_fea.html, diakses tanggal 26 November 2011.
4. url: <http://www.adina.com/index.shtml>, diakses tanggal 26 November 2011.
5. url: <http://www.ansys.com>, diakses tanggal 26 November 2011.
6. url: <http://www.csiberkeley.com/sap2000>, diakses tanggal 26 November 2011.
7. url: http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method, diakses tanggal 26 November 2011.
8. url: <http://preview.filesonic.com/img/c4/6d/ce/3475071.jpg>, diakses tanggal 26 November 2011.
9. url: http://web.srasgroup.com/wp-content/uploads/2010/11/car_impact.jpg, diakses tanggal 26 November 2011.
10. url: <http://www.infometrik.com/2009/08/pengantar-finite-element-method>, diakses tanggal 26 November 2011.
11. url: http://en.wikipedia.org/wiki/Strength_of_materials diakses tanggal 29 November 2011.

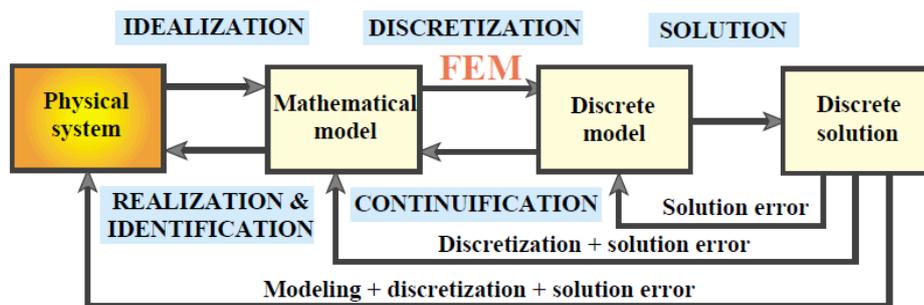
BAB 2

PENGANTAR

METODE ELEMEN HINGGA

2.1 Terminologi

Langkah dasar dalam mempelajari metode elemen hingga selengkapnya diilustrasikan pada Gambar 2.1 [2]. Tiga tahapan utama adalah idealisasi, diskretisasi, dan solusi. Setiap tahapan berpotensi menghasilkan kesalahan (*error*).



Gambar 2.1 Skematik penyederhanaan proses fisik sebagai ilustrasi suatu terminologi pemodelan [2].

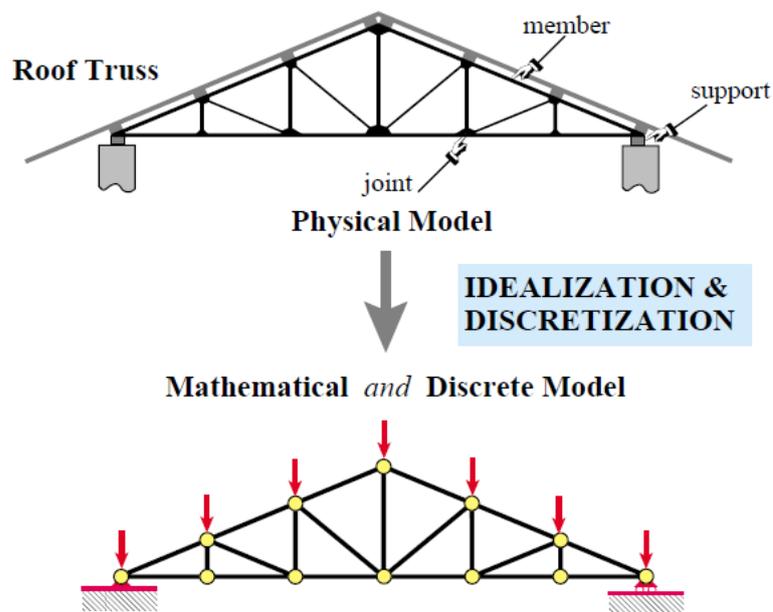
2.2 Idealisasi

Idealisasi (pemodelan matematika) merupakan bentuk fisik dari suatu model struktur yang sebenarnya untuk dianalisis dalam bentuk model matematika [2]. Tahapan ini adalah tahapan yang paling penting, karena benar atau tidak, serta tepat dan tidaknya suatu perhitungan suatu struktur bangunan, tergantung dari idealisasi model struktur dari bentuk yang sebenarnya bangunan tersebut dibangun, menjadi suatu model matematika untuk dianalisis (perhitungan struktur tersebut).

Sebagai contoh, Gambar 2.2 memperlihatkan perencanaan suatu struktur rangka atap. Sesuai terminologi Gambar 2.1, maka dari bentuk struktur yang

sebenarnya selanjutnya dimodelkan (idealisasi struktur) untuk keperluan perhitungan secara matematika, dalam hal ini adalah mengenai perilaku kekuatan dan kekakuan struktur. Apabila idealisasi yang dilakukan sesuai kondisi yang sebenarnya (sebagai contoh besarnya beban, ukuran batang-batang penyusun rangka atap, properti mekanis material yang digunakan, dan tumpuan), maka hasil perhitungan yang diperoleh akan dapat dianggap mewakili kondisi yang sebenarnya.

Artinya apabila struktur tersebut dibangun, apabila terjadi pembebanan seperti yang direncanakan, perilaku kekuatan dan kekakuan struktur tersebut dalam kondisi kenyataan tidak akan berbeda jauh dengan hasil perhitungan (prediksi).



Gambar 2.2 Model diskret suatu struktur rangka atap [2].

Kata model dapat diartikan salinan dari suatu bentuk aslinya dalam skala tertentu. Model dibuat untuk sarana simulasi perilaku suatu bentuk asli tersebut. Sebagai contoh, suatu model jembatan dibuat untuk keperluan simulasi struktur jembatan apabila terdapat beban-beban yang bekerja, sehingga dapat dipelajari perilaku kekuatan dan kekakuan struktur jembatan tersebut. Apabila hasil simulasi model jembatan tersebut telah memperlihatkan bahwa bangunan aman, maka

barulah layak untuk dibangun/direalisasikan menjadi struktur jembatan yang sebenarnya.

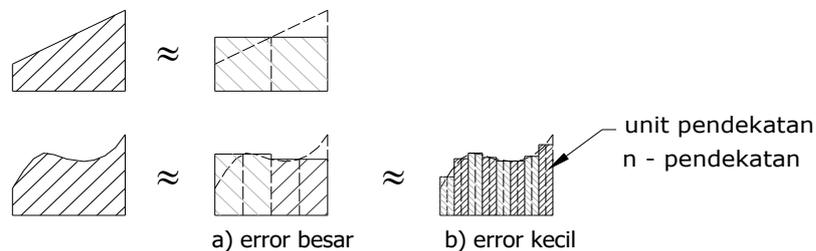
Pemodelan matematika (idealisasi) memerlukan dasar teori yang tepat dan benar. Sebagai contoh untuk pemodelan struktur *flat-plate* akibat beban transversal, terdapat 4 (empat) dasar teori [2], yaitu sebagai berikut:

1. Model *very thin plate*, didasarkan pada teori Von Karman's coupled membrane-bending.
2. Model *thin plate*, didasarkan pada teori Kirchhoff's plate.
3. Model *moderately thick plate*, didasarkan pada teori Mindlin-Reissner plate.
4. Model *very thick plate*, didasarkan pada teori three-dimensional elasticity.

2.3 Diskretisasi

Pada tahapan diskretisasi, ada dua solusi utama yang dapat dipilih, yaitu solusi analitikal dan solusi secara numerikal. Solusi secara analitis (analitikal) adalah pendekatan yang lebih intelektual, sedangkan solusi numerikal keakuratan hasilnya bergantung dari model yang dibuat. Gambar 2.3 memperlihatkan ilustrasi perhitungan luas area suatu bidang.

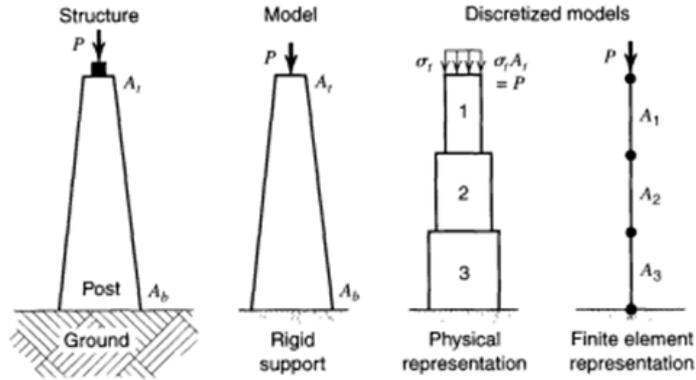
Dalam penyelesaian dengan solusi numerikal, hasil akan akurat apabila jumlah n (pendekatan) semakin banyak sehingga hasil akan semakin teliti. Hal ini secara skematik dapat dibuktikan melalui Gambar 2.3, dimana pada model elemen hingga Gambar 2.3b menggunakan pendekatan jumlah n yang lebih banyak dibandingkan dengan model pertama Gambar 2.3a, sehingga hasil yang diperoleh akan lebih akurat, dalam arti *error* yang terjadi lebih kecil.



Gambar 2.3 Pendekatan menghitung suatu luas bidang.

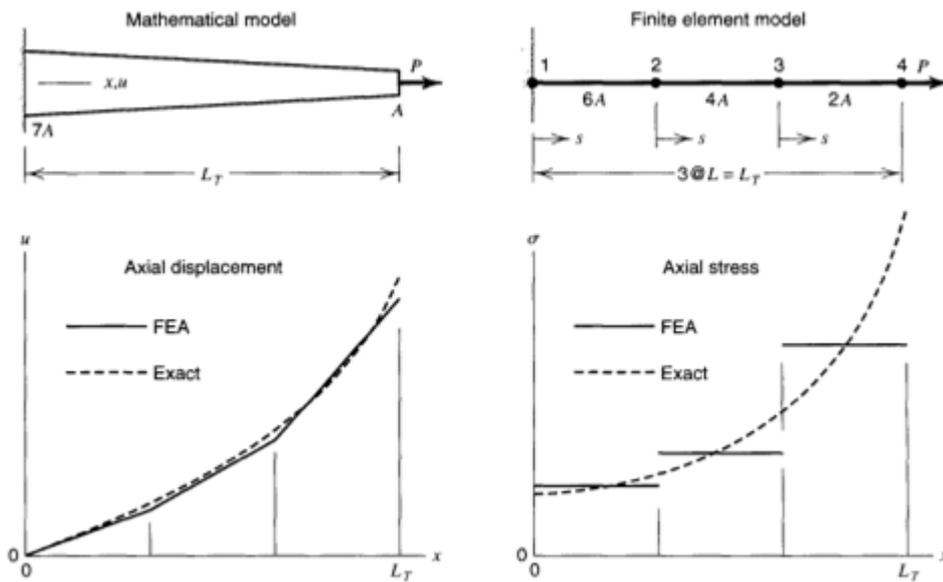
Gambar 2.4 memperlihatkan contoh studi kasus struktur menara yang dibebani terpusat P . Struktur mempunyai dimensi dan ukuran penampang yang

tidak *uniform* dari tumpuan bawah sampai dengan puncak (atas). Dalam penyelesaiannya, dengan menggunakan pendekatan metode elemen hingga, maka dibuat representasi elemen hingga dengan membagi menjadi tiga elemen (model diskretisasi).

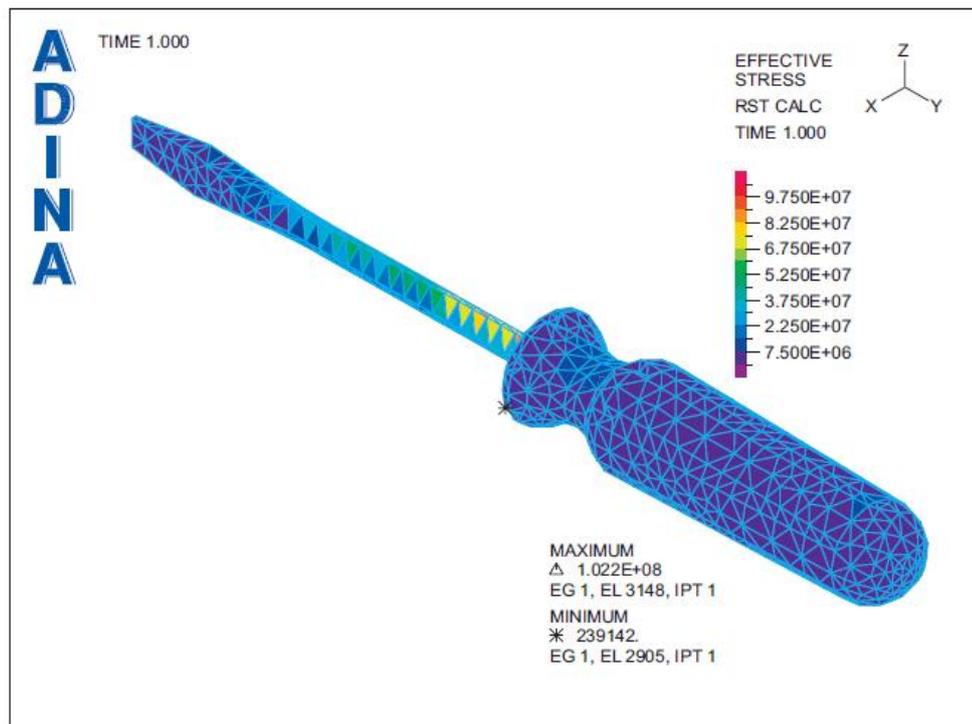


Gambar 2.4 Diskretisasi model struktur sebenarnya menjadi elemen hingga [1].

Selanjutnya Gambar 2.5 memperlihatkan contoh yang serupa dengan studi kasus sebelumnya (Gambar 2.4). Gambar 2.5 memperlihatkan sebuah struktur kantilever dengan bentuk dan ukuran penampang nonprismatis (tidak *uniform*). Hasil perhitungan secara skematik dijelaskan melalui gambar, yang mana menunjukkan bahwa tingkat ketelitian (pembagian jumlah elemen) mempengaruhi hasil yang diperoleh (berkaitan dengan besar/kecilnya *error* yang terjadi).



Gambar 2.5 Diskretisasi struktur kantilever dengan elemen hingga [1].



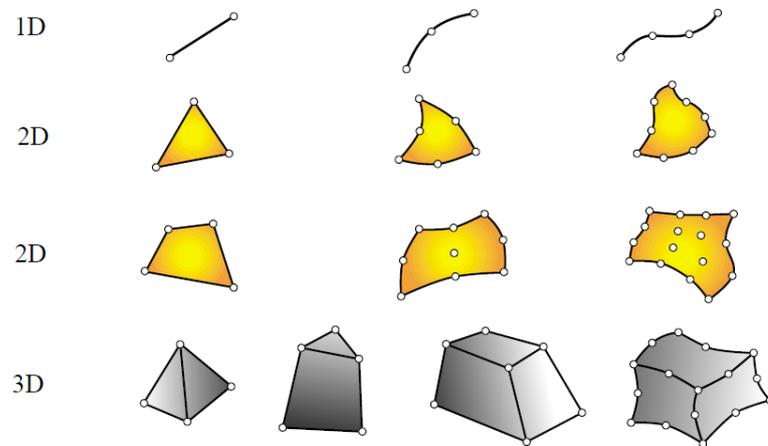
Gambar 2.6 Diskretisasi model *screwdriver* [3].

Gambar 2.6 memperlihatkan skematik model *screwdriver* dalam simulasi numerik menggunakan perangkat lunak ADINA [3]. Pembuatan model tersebut dimaksudkan sebagai sarana simulasi secara “virtual”, seolah-olah diketahui kemampuan *screwdriver* apabila digunakan/diterapkan dalam kondisi riil. Diharapkan dari simulasi tersebut diperoleh informasi tegangan yang mengakibatkan *screwdriver* mengalami kelelahan, sehingga apabila produk tersebut diedarkan, dapat dilengkapi dengan informasi berapa kemampuan maksimal yang mampu digunakan. Untuk menunjang keakuratan hasil simulasi numerik, maka diperlukan validasi empiris dengan membuat benda uji yang sebenarnya, untuk selanjutnya di-tes di laboratorium.

2.4 Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga (selanjutnya disebut MEH atau FEM) merupakan suatu teknik diskretisasi yang sangat dominan dalam mekanika struktur. Konsep dasar MEH adalah membagi suatu model matematika menjadi komponen-

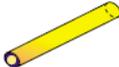
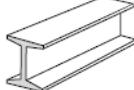
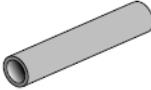
komponen (tidak terjadi overlap) geometri yang sederhana, yaitu disebut elemen hingga (*finite element*) atau elemen (*element*).



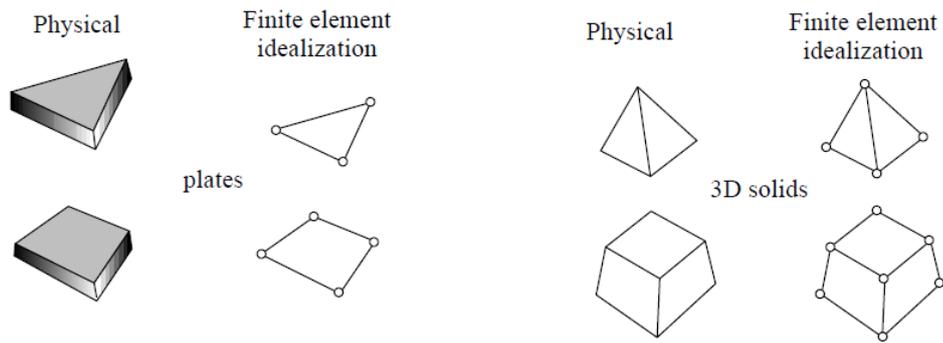
Gambar 2.7 Geometri elemen hingga dalam konteks 1D, 2D, dan 3D [2].

2.5 Klasifikasi Elemen Mekanis

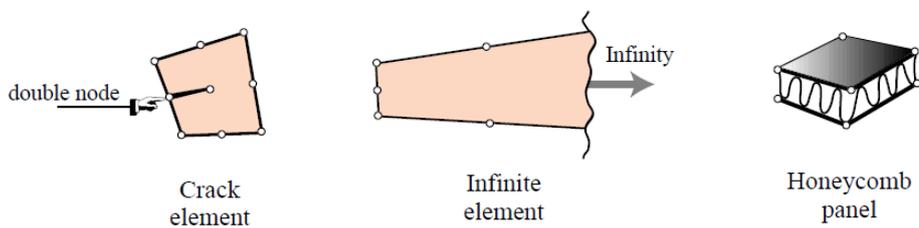
Klasifikasi elemen hingga pada suatu mekanika struktur berhubungan dengan kondisi fisik struktur yang sebenarnya. Beberapa klasifikasi yaitu elemen primitif, elemen kontinu, elemen spesial, elemen makro, dan substruktur.

Physical Structural Component	Mathematical Model Name	Finite Element Idealization
	bar	
	beam	
	tube, pipe	
	spar (web)	
	shear panel (2D version of above)	

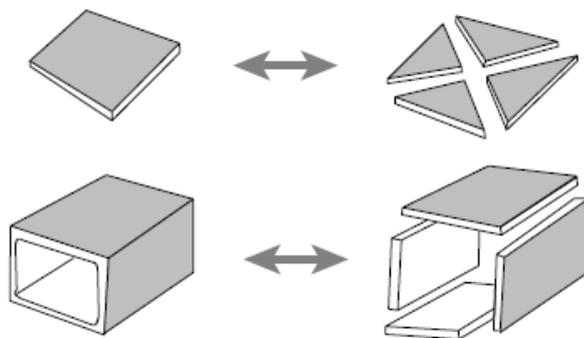
Gambar 2.8 Beberapa contoh elemen struktur primitif [2].



Gambar 2.9 Beberapa contoh elemen kontinu [2].



Gambar 2.10 Contoh elemen struktur spesial [2].



Gambar 2.11 Contoh elemen makro [2].

2.6 Kondisi Batas

Kondisi batas telah dipelajari sebelumnya pada matakuliah Statika dan Mekanika Bahan, Analisis Struktur, dan Analisis Struktur Metode Matriks. Kekuatan kunci dari metode elemen hingga adalah bagaimana mengelola kondisi-kondisi batas dan kondisi-kondisi *interface*. Penjelasan lebih detail mengenai hal ini akan dipelajari pada bab-bab selanjutnya.

2.7 Referensi

1. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
2. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.
3. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.

BAB 3

ELEMEN SATU DIMENSI

DAN PROSEDUR

KOMPUTASI

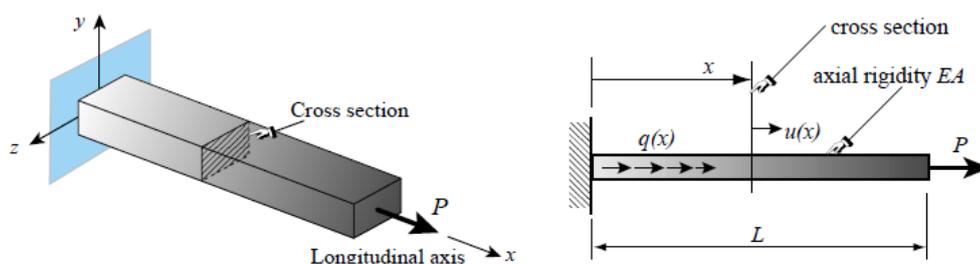
3.1 Pendahuluan

Elemen satu dimensi, sebagai contoh antara lain batang yang diberi beban aksial dan balok sederhana (tumpuan sendi-rol) dengan beban terpusat ditengah bentang. Definisi elemen batang (*bar*) adalah elemen yang hanya dapat menahan dan menyalurkan gaya aksial saja, sedangkan elemen balok (*beam*) adalah elemen yang dapat menahan gaya-gaya aksial, geser, dan momen lentur [3].

Dalam analisis struktur, dimana pengaruh waktu tidak diperhitungkan, artinya beban yang bekerja tidak bergantung terhadap waktu, suatu struktur rangka batang (*truss*) dengan jumlah batang n , dapat dimodelkan dengan menggunakan sejumlah n elemen batang. Demikian pula pada suatu struktur *frame* yang disusun oleh sejumlah n balok (dan kolom), dapat dimodelkan dengan menggunakan sejumlah n elemen balok.

3.2 Elemen Batang

Dalam subbab ini dipelajari mengenai elemen batang (*bar*) dengan kondisi material elastik dan bentuk penampang batangnya prismatik-*uniform*, seperti terlihat pada contoh Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Struktur kantilever dengan model elemen batang [4].

Persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut,

$$\frac{AE}{L}(u_1 - u_2) = F_1 \quad (3.1a)$$

$$\frac{AE}{L}(u_2 - u_1) = F_2 \quad (3.1b)$$

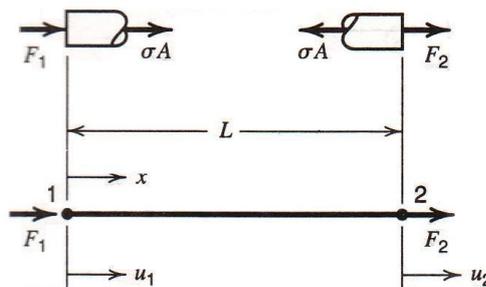
Jika ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{dimana } k = \frac{AE}{L} \quad (3.2)$$

Persamaan keseimbangan, maka $F_1 = -F_2$, maka Persamaan 3.2 dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] \cdot \{\mathbf{d}\} = -\{\mathbf{r}\} \quad (3.3)$$

dimana $[\mathbf{k}]$ dinamakan matriks kekakuan elemen.



Gambar 3.2 Elemen batang dengan dua titik nodal [3].

Untuk contoh studi kasus elemen batang dengan dua titik nodal, dimana hanya terjadi peralihan (*displacement*) aksial pada titik nodal, maka matriks $[\mathbf{k}]$ adalah matriks berukuran 2×2 sesuai Persamaan 3.2. Vektor $\{\mathbf{r}\}$ bertanda negatif, karena asumsi yang digunakan dalam pembahasan ini adalah vector $\{\mathbf{r}\}$ diartikan sebagai beban yang berhubungan dengan deformasi elemen, yang diaplikasikan oleh elemen terhadap titik nodal struktur pada elemen yang akan disambungkan. Maka,

$$-\{\mathbf{r}\} = [F_1 \ F_2]^T \quad (3.4)$$

dimana k adalah kekakuan dari model pegas linier atau AE/L .

Sebagai contoh, dimisalkan $u_1 = 0$ dan $u_2 = 1$, maka Persamaan 3.2 menjadi sebagai berikut,

$$-\{\mathbf{r}\} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

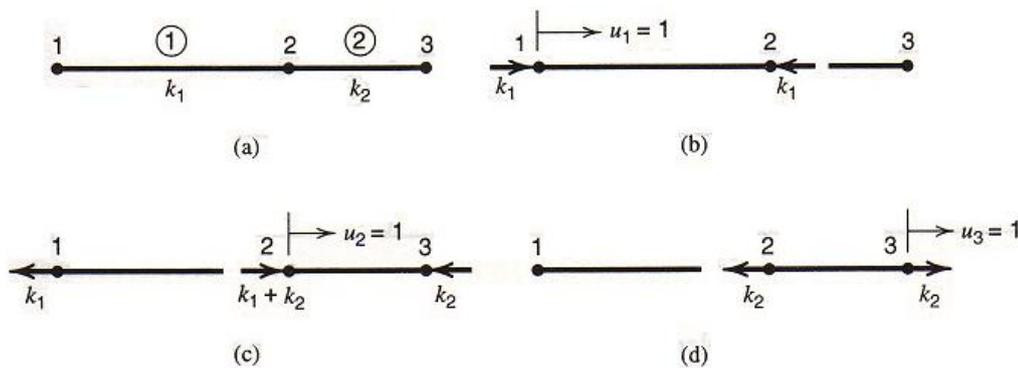
maka regangan dalam hal ini adalah $\varepsilon = u_2/L$.

Untuk struktur yang disusun oleh dua elemen batang (penampang *uniform* dan material elastik), maka persamaan kekakuan strukturnya dapat dituliskan sebagai berikut,

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (3.6a)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & k_2 \\ 0 & k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.6b)$$

dimana $[\mathbf{K}]$ adalah matriks kekakuan struktur atau disebut pula matriks kekakuan global.



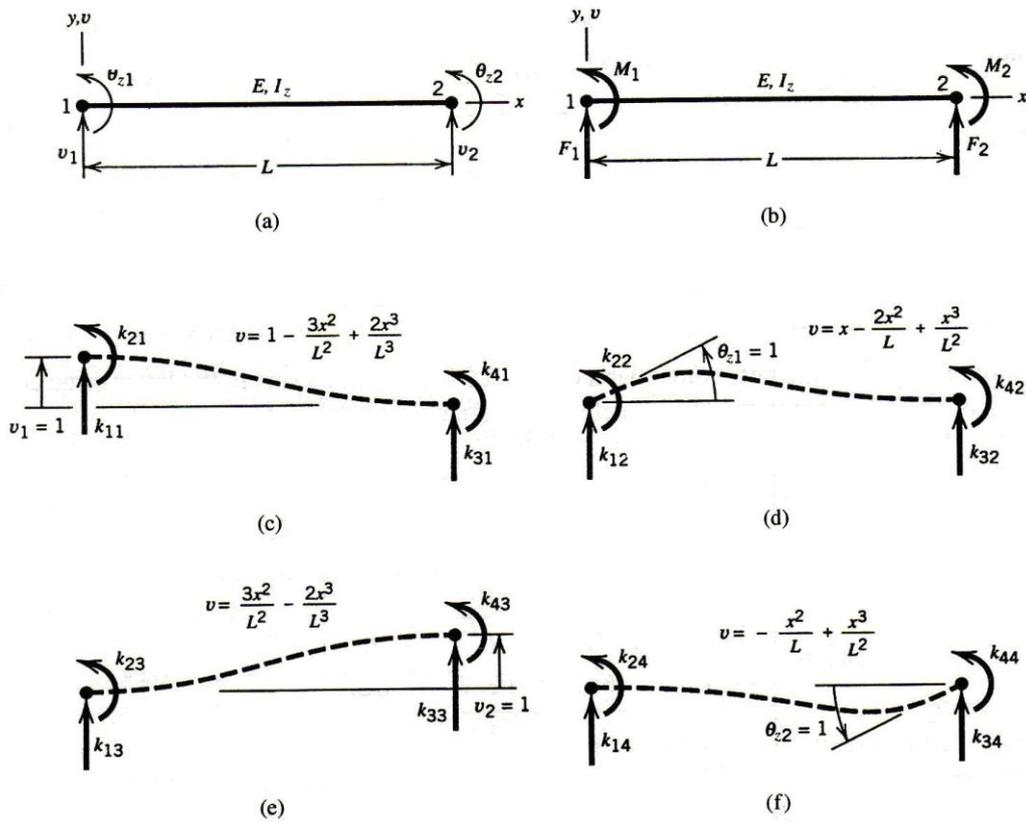
Gambar 3.3 Struktur yang tersusun dari dua buah elemen batang [3].

3.3 Elemen Balok

Dalam subbab ini, dibahas mengenai elemen balok (*beam element*) dengan batasan ruang lingkup yang ditinjau adalah bentuk penampang prisma, materialnya elastik. Elemen balok mempunyai dua titik nodal pada masing-masing ujungnya. Setiap titik nodal mempunyai dua derajat kebebasan (*degree of freedom* atau dof), yaitu translasi dan rotasi.

Dalam pembahasan ini, digunakan batasan asumsi bahwa deformasi geser diabaikan, sehingga teori yang digunakan adalah *Euler-Bernoulli beam theory*. Apabila deformasi geser diperhitungkan maka dikenal adanya teori *Timoshenko beam theory*.

Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi



Gambar 3.4 Elemen balok [3].

Matriks kekakuan elemen balok dua dimensi dapat dituliskan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{matrix} \quad (3.7)$$

dimana,

$$\begin{bmatrix} v_1 & \theta_{z1} & v_2 & \theta_{z2} \end{bmatrix}^T \quad (3.8)$$

Secara umum, persamaan matriks kekakuan elemen balok (dua dimensi) untuk tinjauan deformasi geser diperhitungkan serta diperhitungkan pula adanya translasi aksial pada titik nodal adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & -X & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & Y_2 & 0 & -Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_2 & Y_3 & 0 & -Y_2 & Y_4 \\ -X & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & -Y_1 & -Y_2 & 0 & Y_1 & -Y_2 \\ 0 & Y_2 & Y_4 & 0 & -Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

dimana:

$$X = \frac{AE}{L} \quad (3.9b)$$

$$Y_1 = \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \quad (3.9c)$$

$$Y_2 = \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \quad (3.9d)$$

$$Y_3 = \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \quad (3.9e)$$

$$Y_4 = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \quad (3.9f)$$

$$\phi_y = \frac{12EI_z k_y}{AGL^2} \quad (3.9g)$$

dimana A/k_y adalah luas geser efektif untuk deformasi geser transversal pada arah y . Sebagai contoh, nilai k_y untuk penampang persegi adalah sebesar 1,2, sedangkan untuk penampang lingkaran berlubang dengan dinding tipis adalah sebesar 2,0 [3].

Elemen balok tiga dimensi (*3D beam element*) tidak dibahas dalam buku ini, namun apabila hendak dipelajari secara mandiri, dasar teori yang digunakan, sebagai contoh dapat dilihat pada tinjauan literatur referensi buku *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* halaman 27-29 [3].

3.4 Elemen Batang dan Balok pada Orientasi Sembarang

Untuk elemen dengan orientasi arah sumbu-sumbunya sembarang, maka dipelajari elemen struktur dengan istilah koordinat lokal $x'y'z'$. Selanjutnya untuk

menghitung matrik kekakuan elemen $[k]$, maka diperlukan transformasi koordinat rotasional untuk matriks $[k']$.

3.4.1 Elemen Batang

Persamaan matriks $\{d'\}$ dapat dihitung dengan menggunakan matriks transformasi $[T]$ sebagai berikut,

$$\{d'\} = [T]\{d\} \tag{3.10}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

dimana c adalah $\cos \beta$ dan s adalah $\sin \beta$.

$$\{r\} = [T]^T\{r'\} \tag{3.12}$$

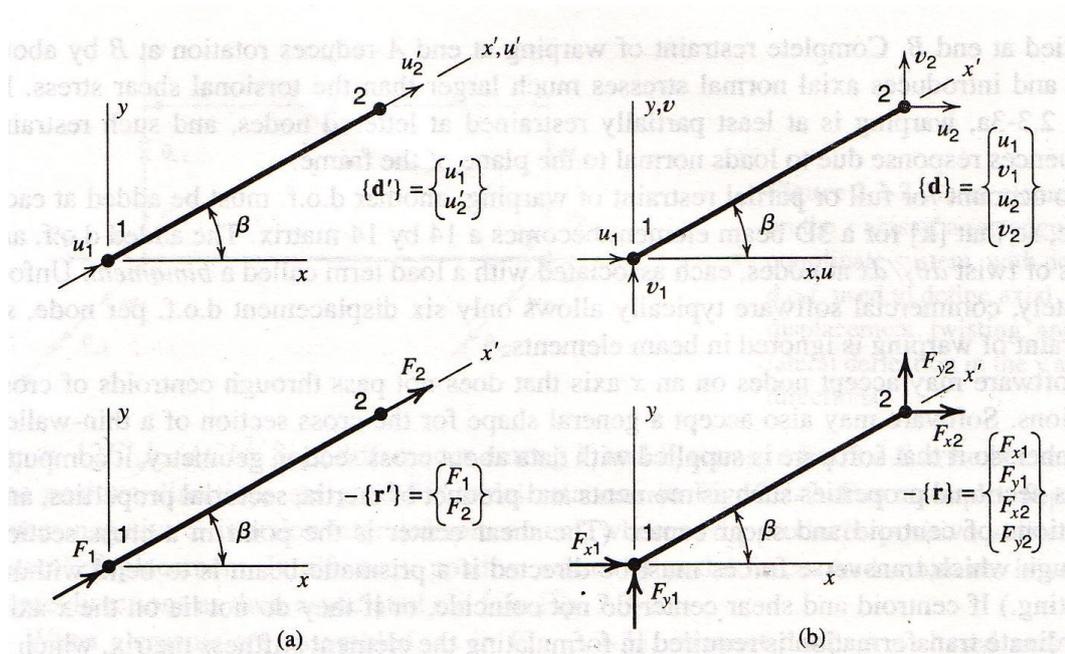
maka hubungan kekakuan elemen dalam tinjauan koordinat lokal dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut,

$$-\{r'\} = [k']\{d'\} \tag{3.13}$$

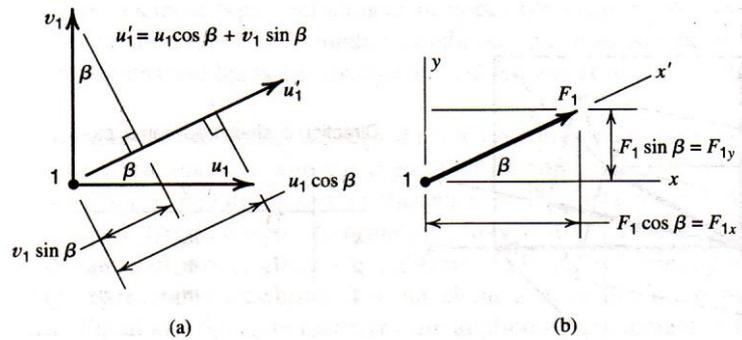
Selanjutnya, dalam tinjauan koordinat global, persamaan sebagai berikut,

$$-\{r\} = [k]\{d\} \tag{3.14}$$

$$[k] = [T]^T[k'] [T] \tag{3.15}$$



Gambar 3.5 D.o.f titik nodal lokal dan global untuk elemen batang [3].



Gambar 3.6 Kontribusi dari u_1 dan v_1 kepada u_1' [3].

Selanjutnya, untuk elemen dalam koordinat global x dan y , perhitungan dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = k \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

dimana untuk sistem bidang xy , maka $l_1 = \cos \beta$, $m_1 = \sin \beta$, dan $n_1 = 0$.

3.4.2 Elemen Balok

Untuk elemen balok, persamaan-persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut,

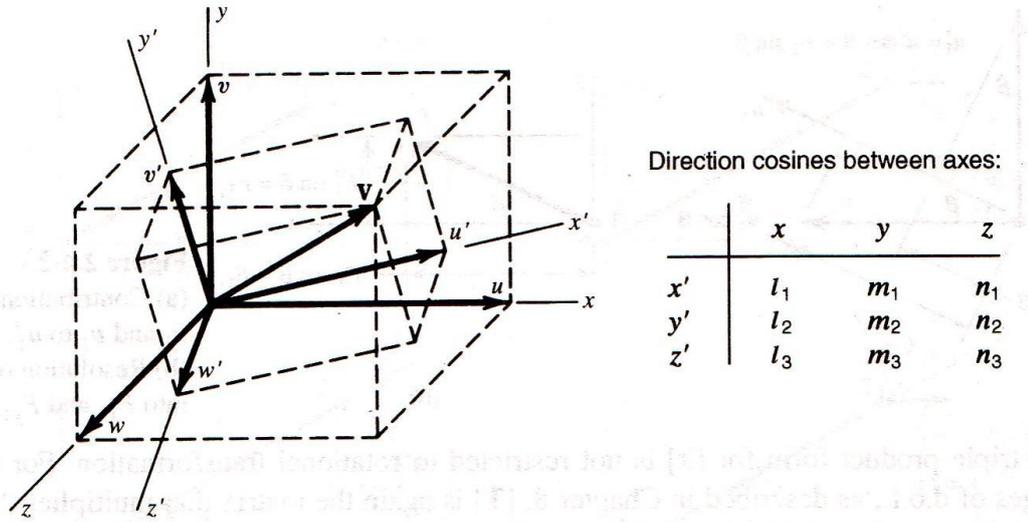
$$u_1' = l_1 u_1 + m_1 v_1 + n_1 w_1 \quad (3.18a)$$

$$\theta_{x1}' = l_1 \theta_{x1} + m_1 \theta_{y1} + n_1 \theta_{z1} \quad (3.18b)$$

Matriks transformasi dari koordinat lokal menjadi global adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (3.19a)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.19b)$$



Gambar 3.8 Vektor \mathbf{V} yang dalam tinjauan komponen uvw (sistem koordinat global) dan $u'v'w'$ (koordinat lokal) [3].

3.5 Perakitan Elemen

Persamaan matriks untuk struktur yang tersusun oleh sejumlah elemen (N_{els}), yang mana menempatkan titik-titik nodal struktur dalam kondisi keseimbangan adalah sebagai berikut,

$$\sum_{i=1}^{N_{els}} \{r\}_i + \sum_{i=1}^{N_{els}} \{r_e\}_i + \{P\} = \{0\} \quad (3.20)$$

$$[\mathbf{K}].\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (3.21)$$

$$[\mathbf{K}] = \sum_{i=1}^{N_{els}} [\mathbf{k}]_i \quad (3.22a)$$

$$\{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{P}\} + \sum_{i=1}^{N_{els}} \{r_e\}_i \quad (3.22b)$$

Perakitan dan penomoran titik nodal struktur, selengkapnya dapat dihitung dengan persamaan-persamaan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}]_1 \{\mathbf{d}\}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad \text{untuk elemen pertama} \quad (3.23a)$$

$$[\mathbf{k}]_2 \{ \mathbf{d} \}_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad \text{untuk elemen kedua} \quad (3.23b)$$

Dimana a dan b adalah penamaan simbolik untuk elemen-elemen matriks $[\mathbf{k}]$. selanjutnya penomoran titik nodal elemen untuk elemen pertama sebagai berikut,

$$-r_1 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \quad (3.24a)$$

$$-r_2 = a_4 d_1 + a_5 d_2 + a_6 d_3 \quad (3.24b)$$

$$-r_3 = a_7 d_1 + a_8 d_2 + a_9 d_3 \quad (3.24c)$$

dan penomoran titik nodal struktur untuk elemen pertama sebagai berikut,

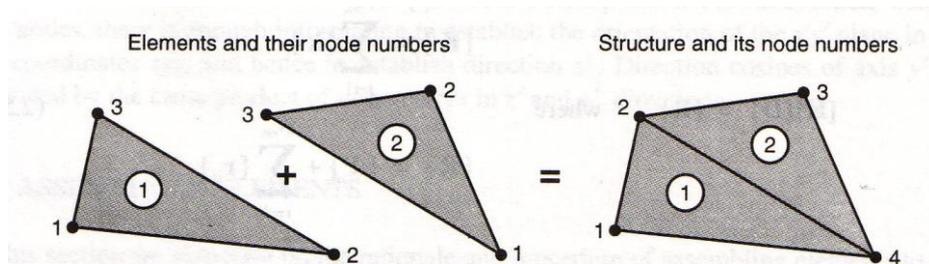
$$-r_1^s = a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 \quad (3.25a)$$

$$-r_4^s = a_4 D_1 + a_5 D_2 + a_6 D_3 \quad (3.25b)$$

$$-r_2^s = a_7 D_1 + a_8 D_2 + a_9 D_3 \quad (3.25c)$$

Untuk elemen pertama, maka persamaan sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} -r_1^s \\ -r_2^s \\ -r_3^s \\ -r_4^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & a_2 \\ a_7 & a_9 & 0 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_6 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

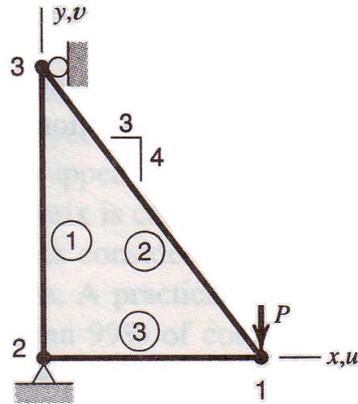


Gambar 3.9. Perakitan dua elemen segitiga [3].

Sedangkan untuk elemen kedua, caranya sama. Maka matriks kekakuan elemen total adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{k}]_1 + [\mathbf{k}]_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & a_2 \\ a_7 & a_9 & 0 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_6 & 0 & a_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_9 & b_8 & b_7 \\ 0 & b_6 & b_5 & b_4 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Contoh soal sebagai berikut, struktur rangka batang yang tersusun oleh tiga buah elemen batang, dengan beban berupa beban terpusat P pada titik nodal 1 (satu), arah beban vertikal kebawah, selengkapnya ditampilkan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Struktur rangka batang.

Hasil perhitungan contoh soal diatas adalah sebagai berikut (belum menerapkan kondisi batas pada tumpuan titik nodal 2 dan titik nodal 3),

$$\begin{bmatrix} k_3 + 0,36k_2 & -0,48k_2 & -k_3 & 0 & -0,36k_2 & 0,48k_2 \\ -0,48k_2 & 0,64k_2 & 0 & 0 & 0,48k_2 & -0,64k_2 \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -0,36k_2 & 0,48k_2 & 0 & 0 & 0,36k_2 & -0,48k_2 \\ 0,48k_2 & -0,64k_2 & 0 & -k_1 & -0,48k_2 & k_1 + 0,64k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ p_2 \\ q_2 \\ p_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Penerapan kondisi batas, yaitu titik nodal 2 dimodelkan sendi dan titik nodal 3 adalah rol, maka $u_2 = v_2 = u_3 = 0$, maka Persamaan 3.28 menjadi sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} k_3 + 0,36k_2 & -0,48k_2 & 0 & 0 & 0 & 0,48k_2 \\ -0,48k_2 & 0,64k_2 & 0 & 0 & 0 & -0,64k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,48k_2 & -0,64k_2 & 0 & 0 & 0 & k_1 + 0,64k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

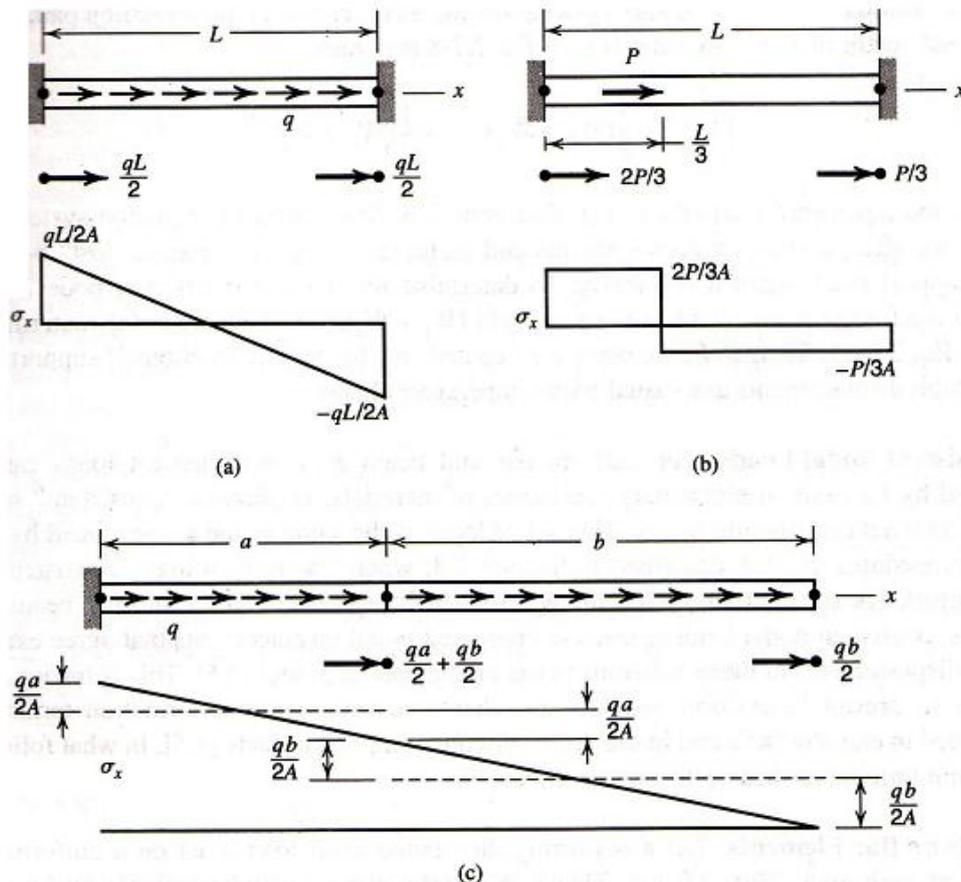
3.6 Beban Mekanis dan Tegangan-Tegangan

Pada elemen batang, tegangan aksial akibat peralihan titik nodal dapat dihitung dengan terlebih dahulu menghitung elongasi e , regangan aksial $\varepsilon = e/L$, dan tegangan aksial $\sigma = E.\varepsilon$. Secara spesifik untuk elemen batang dengan orientasi koordinat xyz , persamaan tegangan sebagai berikut,

$$\sigma = \frac{E}{L} [(u_2 - u_1)l + (v_2 - v_1)m + (w_2 - w_1)n] \quad (3.30)$$

dimana l , m , dan n adalah nilai kosinus terhadap sumbu batang. Nilai numerikal untuk semua dof titik nodal pada struktur ditampilkan pada matriks $\{D\}$ setelah persamaan global diperoleh.

Gambar 3.11a adalah elemen batang (struktur satu elemen) dengan beban merata aksial (q). Sedangkan Gambar 3.11b adalah elemen batang dengan beban aksial terpusat (P). Gambar 3.11c adalah struktur elemen batang kantilever dengan beban merata aksial (q) bekerja sepanjang bentang.

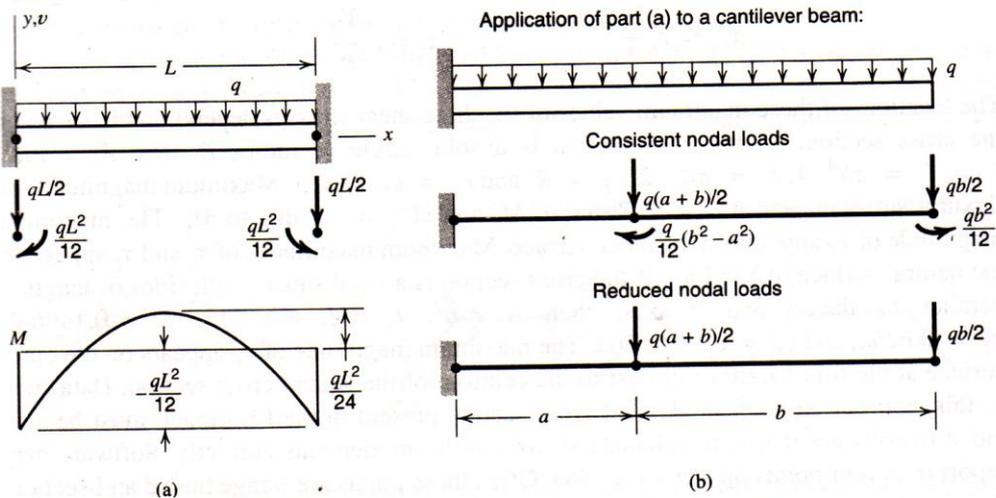


Gambar 3.11 Gaya-gaya titik nodal dan tegangan yang terjadi dari elemen-elemen batang yang dibebani aksial [3].

Gambar 3.12a memperlihatkan struktur balok dengan beban merata, tumpuan masing-masing ujung adalah jepit. Gambar 3.12b adalah struktur balok kantilever dengan beban merata.

Hasil perhitungan untuk balok Gambar 3.12a adalah sebagai berikut,

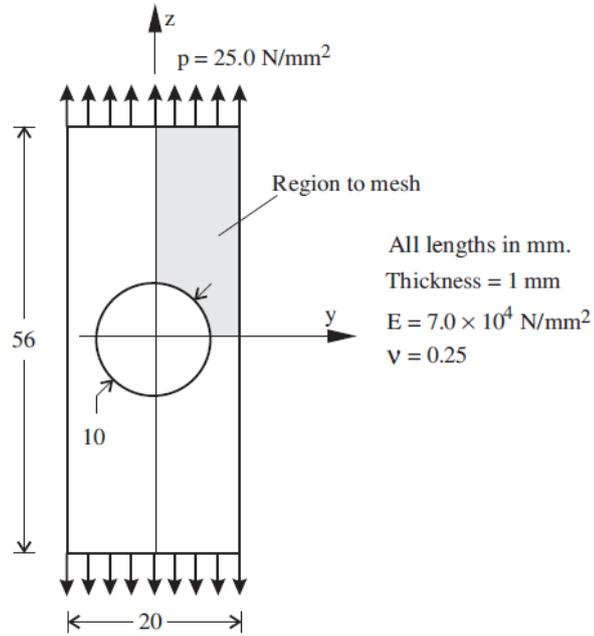
$$\{r_e\} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$



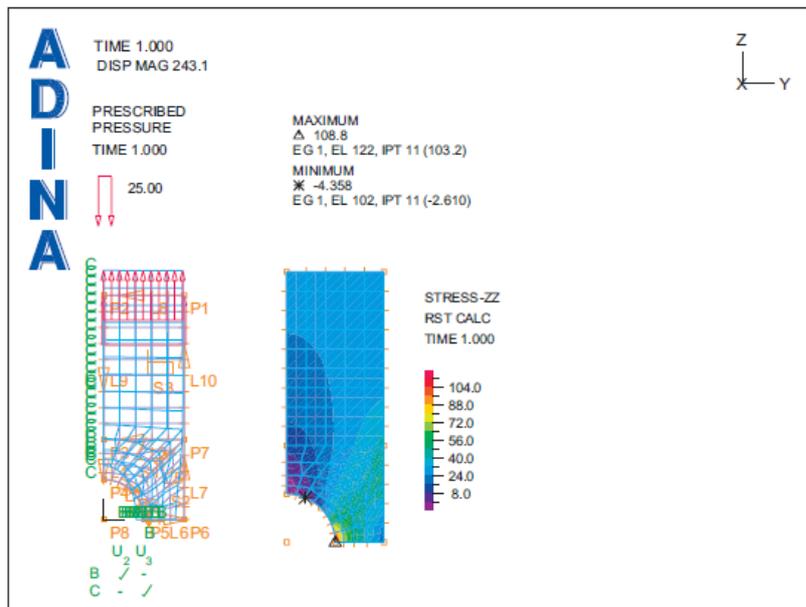
Gambar 3.12 Elemen balok dengan beban merata [3].

3.7 Struktur Simetri

Konsep struktur simetri (*structural symmetry*) telah dipelajari sebelumnya pada matakuliah Analisis Struktur Metode Matriks (ASMM). Ilustrasi penggunaan konsep ini sebagai contoh ditampilkan pada Gambar 3.13. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, maka dibuatlah tinjauan model berupa seperempat bagian saja, yaitu daerah yang diarsir. Hasil perhitungan dengan perangkat lunak ADINA [3] selengkapnya ditampilkan pada Gambar 3.14.



Gambar 3.13 Struktur pelat berlubang [1].



Gambar 3.14 Penyelesaian struktur pelat berlubang [3].

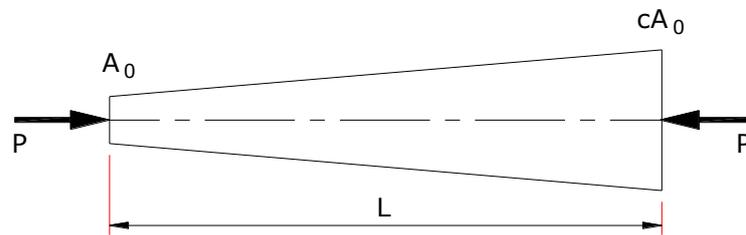
3.8 Soal

1. Soal latihan pertama

Diketahui struktur elemen batang dua titik nodal (Gambar 3.15), dengan luas penampang batang bervariasi secara linier dengan nilai luas penampang sebesar

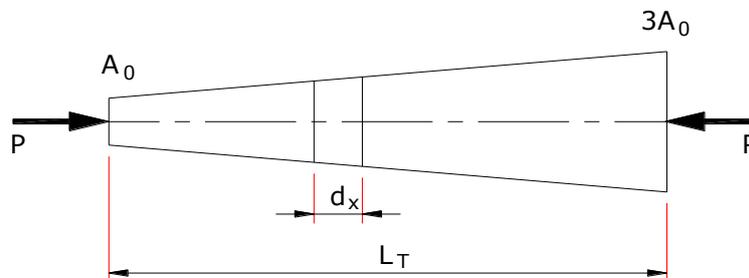
Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

A_0 di titik $x = 0$ dan sebesar $c \cdot A_0$ di titik $x = L$. Sedangkan c adalah konstanta, yaitu $c = 3$. Hitunglah elongasi yang terjadi dengan menggunakan cara eksak.



Gambar 3.15 Soal latihan pertama.

Penyelesaian:



$$d\delta = \frac{P \cdot dx}{EA_{(x)}}$$

$$A_{(x)} = A_0 + \frac{x}{L_T} 2A_0$$

Maka elongasi:

$$\Delta = \int_0^{L_T} \frac{P \cdot dx}{E \left(A_0 + \frac{x}{L_T} 2A_0 \right)} = \frac{P}{EA_0} \int_0^{L_T} \frac{dx}{1 + \frac{2}{L_T} x}$$

$$\Delta = \frac{PL_T}{2EA_0} \int_0^{L_T} \ln \left(1 + \frac{2}{L_T} x \right) = \frac{PL_T}{2EA_0} [\ln(3) - \ln(1)] = \frac{PL_T}{2EA_0} \ln(3)$$

$$\Delta = 0.5493 \frac{PL_T}{EA_0}$$

2. Soal latihan kedua

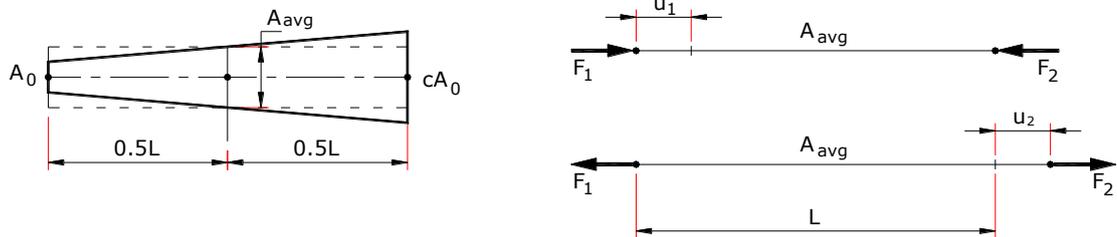
Batang seperti terlihat pada Gambar 3.15 (soal pertama), mempunyai panjang L dan luas penampang bervariasi dari A_0 sampai dengan $3A_0$. Beban yang bekerja

adalah gaya aksial P pada masing-masing ujung. Hitunglah matriks kekakuan elemen, apabila batang dibagi menjadi:

- Satu elemen dengan panjang L .
- Dua elemen sama panjang masing-masing yaitu $0,5L$.
- Tiga elemen sama panjang masing-masing yaitu $0,3333L$.
- Empat elemen sama panjang masing-masing yaitu $0,25L$.

Penyelesaian:

Matrik kekakuan dengan pemodelan rata-rata luasan yang diambil pada tengah-tengah elemen

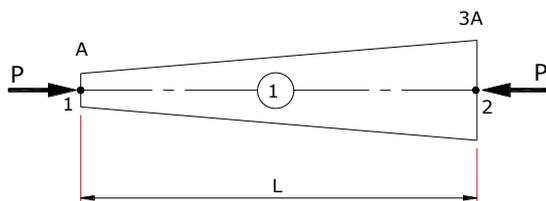


$$A_{avg} = A_0 \frac{(1+c)}{2}$$

Dengan mengambil nilai rata-rata luas penampang maka matrik kekakuannya dapat diambil sama dengan matrik kekakuan batang aksial penampang non-prismatik biasa yaitu:

$$\frac{EA_{avg}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \text{ atau } \frac{EA_0(1+c)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

a. Penyelesaian dengan satu elemen :



$$A_0 = A ; \quad c = 3$$

$$\frac{EA(1+3)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -P \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -P \end{Bmatrix}$$

Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

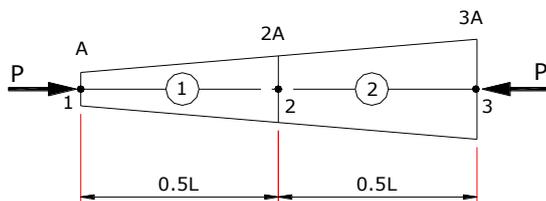
BC pada titik 2 sehingga $u_2 = 0$, oleh sebab itu $u_1 = \Delta$

$$\frac{2EA}{L} \Delta = P$$

$$\Delta = 0.5 \frac{PL}{EA}$$

Hasil tersebut sebesar 91.02% dari nilai eksak, maka *Error* 8.98%.

b. Penyelesaian dengan dua elemen :



Elemen #1:

$$A_0 = A ; \quad c = 2 \quad ; \quad L' = 0.5 L$$

$$\frac{EA}{0.5L} \frac{(1+2)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #2:

$$A_0 = 2A \quad ; \quad c = 1.5 \quad ; \quad L' = 0.5 L$$

$$\frac{2EA}{0.5L} \frac{(1+1.5)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Struktur keseluruhan:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

BC pada titik 3 sehingga $u_3 = 0$, sehingga

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Maka,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

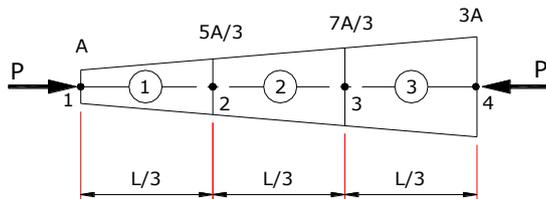
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{EA} \cdot \begin{Bmatrix} 8/15 \\ 1/5 \end{Bmatrix}$$

Karena $\Delta = u_1 - u_3$ sedangkan $u_3 = 0$ maka $\Delta = u_1$

$$\Delta = \frac{8}{15} \frac{PL}{AE} \rightarrow \Delta = 0.53333 \frac{PL}{AE} \quad (97.09\% \text{ dari nilai eksak})$$

Error 2.91%

c. Penyelesaian dengan tiga elemen :



Elemen #1:

$$A_0 = A ; \quad c = 5/3 ; \quad L' = L/3$$

$$\frac{EA}{L/3} \frac{(1 + 5/3)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #2:

$$A_0 = 5A/3 ; \quad c = 7/5 ; \quad L' = L/3$$

$$\frac{5/3 EA}{L/3} \frac{(1 + 7/5)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #3:

$$A_0 = 7A/3 ; \quad c = 9/7 ; \quad L' = L/3$$

Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

$$\frac{7/3 EA (1 + 9/7)}{L/3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Struktur keseluruhan:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

BC pada titik 4 sehingga $u_4 = 0$, sehingga

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

maka,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

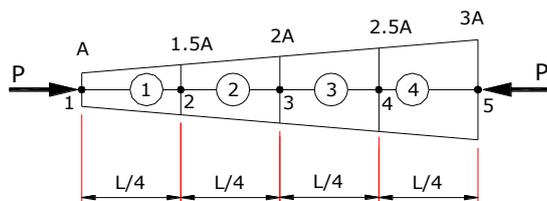
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{AE} \cdot \begin{Bmatrix} 13/24 \\ 7/24 \\ 1/8 \end{Bmatrix}$$

Karena $\Delta = u_1 - u_4$ sedangkan $u_4 = 0$ maka $\Delta = u_1$

$$\Delta = \frac{13}{24} \frac{PL}{AE} \rightarrow \Delta = 0.54167 \frac{PL}{AE} \quad (98.61\% \text{ dari nilai eksak})$$

Error 1.39%

d. Penyelesaian dengan empat elemen :



Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

Elemen #1:

$$A_0 = A ; \quad c = 1.5 ; \quad L' = L/4$$

$$\frac{EA}{L/4} \frac{(1+1.5)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #2:

$$A_0 = 1.5A ; \quad c = 4/3 ; \quad L' = L/4$$

$$\frac{1.5EA}{L/4} \frac{(1+4/3)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #3:

$$A_0 = 2A ; \quad c = 1.25 ; \quad L' = L/4$$

$$\frac{2EA}{L/4} \frac{(1+1.25)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #4:

$$A_0 = 2.5A ; \quad c = 1.2 ; \quad L' = L/4$$

Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

$$\frac{2.5EA}{L/4} \frac{(1+1.2)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Struktur keseluruhan:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 20 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

BC pada titik 5 sehingga $u_5=0$, sehingga

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 12 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

maka,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 12 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{AE} \begin{Bmatrix} 1888/3465 \\ 239/693 \\ 20/99 \\ 1/11 \end{Bmatrix}$$

Karena $\Delta = u_1-u_5$ sedangkan $u_5 = 0$ maka $\Delta = u_1$

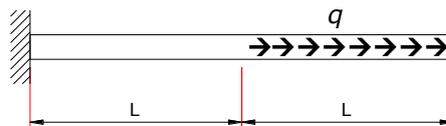
$$\Delta = \frac{1888}{3465} \frac{PL}{AE} \rightarrow \Delta = 0.544877 \frac{PL}{AE} \quad (99.19\% \text{ dari nilai eksak})$$

Error 0.81%

3. Soal latihan ketiga

Diketahui batang dengan bentuk penampang *uniform*, dengan beban aksial merata q seperti terlihat pada Gambar 3.16. Anggap bahwa properti elemen adalah AE . Hitunglah distribusi tegangan aksial yang terjadi pada batang, yaitu dengan cara:

- Menggunakan satu elemen dengan panjang $2L$.
- Menggunakan dua elemen dengan panjang masing-masing L .



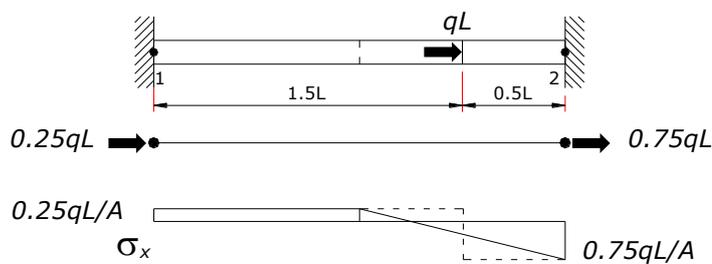
Gambar 3.16 Batang dengan beban merata q .

Penyelesaian:

- Memakai 1 elemen panjangnya $2L$



(a) Pemodelan Elemen



(b) Beban nodal dan stress fields

Matrik kekakuan dari struktur diatas sebelum diberi B.C adalah

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H + 0.25qL \\ 0.75qL \end{Bmatrix}$$

B.C diberikan pada titik 1 yaitu $u_1=0$

Maka matrik berubah menjadi

$$\frac{AE}{L} u_2 = 0.75qL$$

Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

Sehingga $u_2 = 0.75 \frac{qL^2}{AE}$

Reaksi tumpuan dicari dengan memasukkan nilai u ke matrik kekakuan sebelum diberi B.C sbb:

$$\{H + 0.25qL\} = \frac{AE}{L} [1 \quad -1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.75 \frac{qL^2}{AE} \end{Bmatrix} = -0.75qL$$

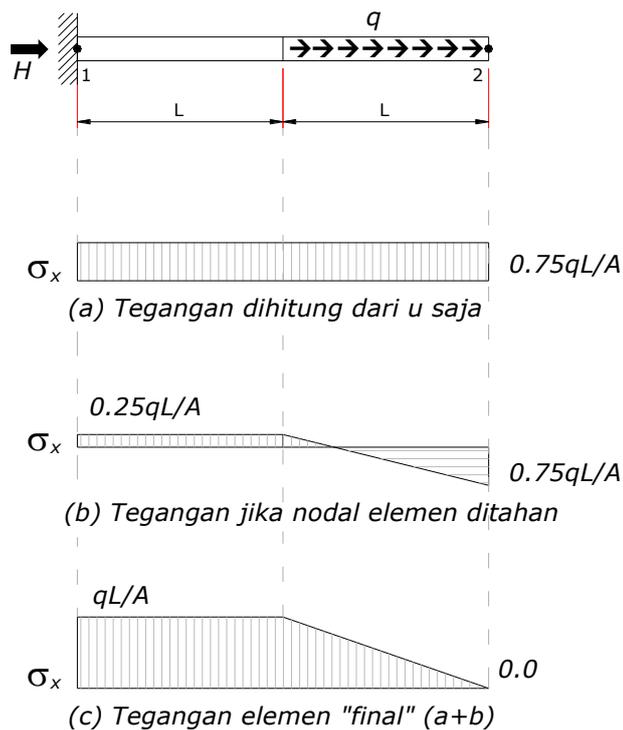
Maka $H = -0.75qL - 0.25qL = -qL$

Sedangkan tegangan-tegangan pada titik nodal dihitung sebagai berikut:

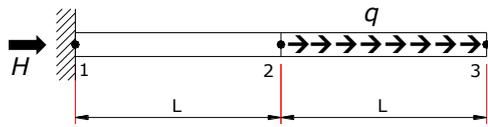
Akibat perpindahan u

$$\sigma_{1-2} = E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(0.75 \frac{qL^2}{AE} - 0 \right) = 0.75 \frac{qL}{A}$$

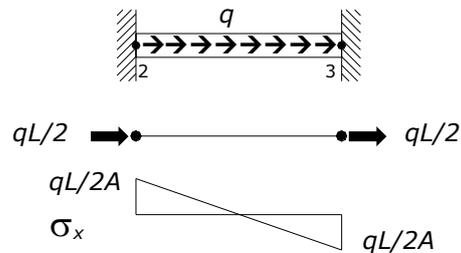
Maka distribusi tegangan elemen tersebut



b. Memakai 2 elemen, masing-masing panjangnya L



(a) Pemodelan Elemen



(b) Beban nodal dan stress fields

Matrik kekakuan dari struktur diatas sebelum diberi B.C adalah

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

B.C diberikan pada titik 1 yaitu $u_1=0$

Maka matrik berubah menjadi

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

Diselesaikan dengan cara invers

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{Bmatrix} qL \\ 1.5qL \end{Bmatrix}$$

Reaksi tumpuan dicari dengan memasukkan nilai u ke matrik kekakuan awal sbb:

$$\{H\} = [1 \quad -1 \quad 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ qL \\ 1.5qL \end{Bmatrix} = -qL$$

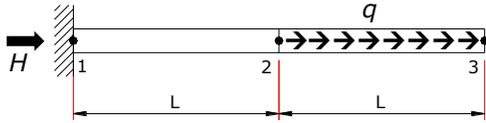
Sedangkan tegangan-tegangan pada titik nodal dihitung sebagai berikut:

Akibat perpindahan u

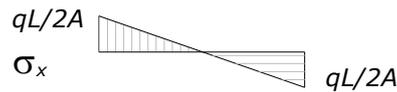
$$\sigma_{1-2} = E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{qL^2}{AE} - 0 \right) = \frac{qL}{A}$$

$$\sigma_{2-3} = E \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{1.5qL^2 - qL^2}{AE} \right) = \frac{0.5qL}{A}$$

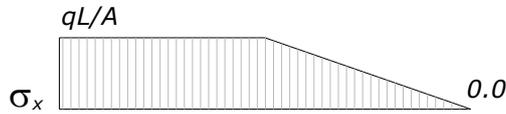
Maka distribusi tegangan pada ke dua elemen tersebut



(a) Tegangan dihitung dari u saja



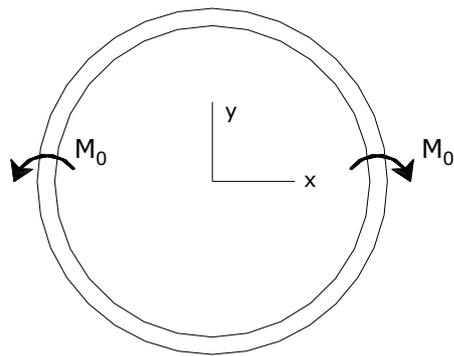
(b) Tegangan jika nodal elemen ditahan



(c) Tegangan elemen "final" (a+b)

4. Soal latihan keempat

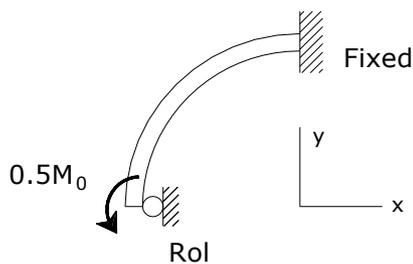
Diketahui suatu ring dengan beban berupa momen M_o seperti terlihat pada Gambar 3.17. Untuk menyelesaikan permasalahan ini, hanya diperlukan model simetri, yaitu model seperempat ring saja. Tentukanlah kondisi batas dan beban yang dibutuhkan, agar solusi dengan model seperempat ring hasilnya sama dengan model *full*-ring.



Gambar 3.17 Model Struktur Ring Penuh.

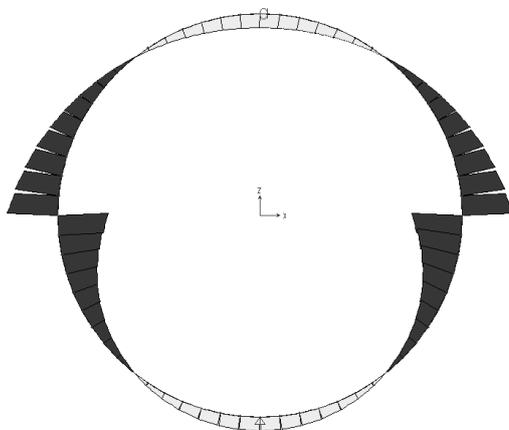
Penyelesaian:

Ring yang dibebani seperti diatas simetri baik dalam hal struktur maupun beban sehingga dapat dimodelkan hanya menggunakan $\frac{1}{4}$ bagian saja. Adapun B.C dari bagian tersebut dan juga pembebanannya harus dibuat sebagai berikut:

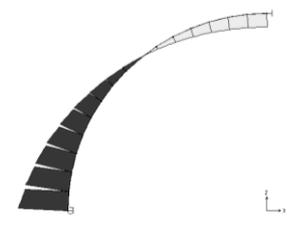


Model Struktur $\frac{1}{4}$ Ring

Untuk membuktikan, ditinjau rangka berbentuk ring penuh dan $\frac{1}{4}$ bagian ring, lalu diberikan momen nodal dengan perbandingan yang sama seperti pada gambar. Dari program SAP2000 dapat digambarkan Bending Moment Diagram,



BMD Struktur Ring Penuh



BMD Struktur $\frac{1}{4}$ Ring

3.9 Referensi

1. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.
2. Computer and Structures, Inc. 2005. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
3. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
4. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.

BAB 4

ELEMEN-ELEMEN DASAR

4.1 Preliminary

Hampir semua elemen yang dipelajari dalam bab ini adalah berbasis perpindahan. Bab ini mempelajari interpolasi dan elemen-elemen sederhana dalam lingkup berbasis perpindahan, serta bagaimana mem-formulasikan matriks kekakuan.

Sebagian elemen dapat di-formulasikan dengan menggunakan metode kekakuan langsung (*direct stiffness method*), seperti yang telah diterapkan pada elemen batang dan elemen balok. Secara umum, formulasi elemen untuk mekanika struktur menggunakan dasar teori analisis tegangan yang ada, termasuk didalamnya hubungan tegangan-regangan, hubungan regangan-peralihan, dan prinsip energi [3]. Formula yang ditinjau dalam bab ini berbasis koordinat kartesian. Apabila diperlukan, maka formula untuk koordinat polar dan silindrikan dapat disusun pula.

4.1.1 Hubungan Tegangan dengan Regangan

Hubungan tegangan-regangan, dapat dijabarkan dalam persamaan sebagai berikut (catatan: asumsi material dalam kondisi elastik linier),

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \quad (4.1a)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) \quad (4.1b)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = - [\mathbf{E}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) \quad (4.1c)$$

Persamaan 4.1 berlaku untuk model struktur satu dimensi, dua dimensi, dan tiga dimensi. Untuk lingkup tegangan uniaksial dimana tidak terdapat tegangan awal (*initial stress* sama dengan nol), maka persamaan tersebut menjadi lebih sederhana yaitu $\sigma = E\varepsilon$, dimana E adalah modulus elastisitas. Untuk konteks koordinat bidang xy ,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Matriks konstitutif $[\mathbf{E}]$ simetris, $E_{ij} = E_{ji}$. Untuk kondisi tegangan bidang dan material bersifat isotropic, maka,

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \quad (4.3)$$

$$[\mathbf{E}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4a)$$

$$[\mathbf{E}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (4.4b)$$

dimana ν adalah rasio poisson dan G adalah modulus geser, yang mana dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.5)$$

Dalam bentuk umum, apabila diperhitungkan tegangan awal,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Regangan awal $\{\varepsilon_0\}$ dapat terjadi akibat, sebagai contoh perubahan suhu, perubahan kadar air, atau radiasi.

4.1.2 Hubungan regangan dengan peralihan

Hubungan antara regangan dengan peralihan dalam lingkup tinjauan struktur dua dimensi, dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.7a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.7b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.7c)$$

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad (4.8a)$$

$$\varepsilon_y = u_{,y} \quad (4.8b)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (4.8c)$$

Dalam tinjauan struktur tiga dimensi, peralihan dalam koordinat x , y , dan z adalah sebagai berikut,

$$u = u(x,y,z) \quad (4.9a)$$

$$v = v(x,y,z) \quad (4.9b)$$

$$w = w(x,y,z) \quad (4.9c)$$

$$\varepsilon_z = w_{,z} \quad (4.10a)$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \quad (4.10b)$$

$$\gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} \quad (4.10c)$$

Dalam format matriks dapat ditulis dalam persamaan sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.11a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.11b)$$

Gambar 4.1 Suatu bidang segiempat yang sangat kecil [3].

4.1.3 Kompatibilitas

Ketika suatu struktur benda mengalami deformasi yang kontinu (tidak patah), tidak terjadi retak, lentur yang terjadi tidak berlebihan, dan partikel material tidak saling *overlap*. Persamaan kompatibilitas memerlukan kondisi yaitu deformasi yang terjadi kontinu dan mempunyai nilai tunggal pada setiap posisinya.

Pada lingkup permasalahan struktur berbentuk bidang, persamaan kompatibilitas sebagai berikut,

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xv} = \gamma_{xy,xy} \quad (4.12)$$

Dari persamaan tersebut, dapat dilihat bahwa regangan harus selalu ada agar kondisi kompatibilitas terpenuhi.

4.1.4 Persamaan Keseimbangan

Gambar 4.2 memperlihatkan tegangan-tegangan yang terjadi pada suatu elemen diferensial (permasalahan bidang dua dimensi). Dalam konteks koordinat kartesian, untuk suatu bidang dengan ketebalan t maka persamaan keseimbangan gaya-gayanya adalah sebagai berikut,

$$-\sigma_x t dy - \tau_{xy} t dx + (\sigma_x + \sigma_{x,x} dx) t dy + (\tau_{xy} + \tau_{xy,y} dy) t dx + F_x t dx dy = 0 \quad (4.13)$$

Selanjutnya, persamaan untuk benda *solid* dua dimensi, persamaan menjadi sebagai berikut,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + F_x = 0 \quad (4.14a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y = 0 \quad (4.14b)$$

Selanjutnya, persamaan untuk benda *solid* tiga dimensi, persamaan menjadi sebagai berikut,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} + F_x = 0 \quad (4.15a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + F_y = 0 \quad (4.15b)$$

$$\tau_{zx,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z = 0 \quad (4.15b)$$

Dalam bentuk umum (dua dimensi maupun tiga dimensi) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$[\partial]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\mathbf{F}\} = \{0\} \quad (4.16)$$

Gambar 4.2 Elemen diferensial dengan ketebalan t [3].

4.1.5 Kondisi Batas

Kondisi batas telah dibahas baik pada bab sebelumnya, maupun dari matakuliah-matakuliah sebelumnya seperti Statika, Analisis Struktur, maupun Analisis Struktur Metode Matriks.

4.1.6 Solusi Pendekatan dan Solusi Eksak

Solusi eksak harus memenuhi persamaan kompatibilitas, persamaan keseimbangan, dan kondisi batas. Solusi eksak dapat diperoleh apabila diketahui data-data berupa kondisi tumpuan-tumpuan yang digunakan, pembebanan yang bekerja, dan kondisi geometri struktur.

4.2 Interpolasi dan Bentuk Fungsi

Dalam konteks d.o.f umum a_i , interpolasi polinomial dengan variabel tidak bebas ϕ dan variabel bebas x dapat ditulis sebagai berikut,

$$\phi = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{atau} \quad \phi = [\mathbf{X}][\mathbf{a}] \quad (4.17)$$

dimana,

$$[\mathbf{X}] = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^n] \quad (4.18a)$$

$$[\mathbf{a}] = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]^T \quad (4.18b)$$

dimana $n = 1$ untuk interpolasi linier, dan $n = 2$ untuk interpolasi kuadrat, dan seterusnya. Hubungan Persamaan 4.17 dengan Persamaan 4.18 dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$[\phi_e] = [\mathbf{A}][\mathbf{a}] \quad (4.19a)$$

$$\phi = [\mathbf{N}][\phi_e] \quad (4.19b)$$

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{X}][\mathbf{A}]^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots] \quad (4.19c)$$

Nilai individu dari N_i pada matriks $[\mathbf{N}]$ disebut bentuk fungsi (*shape function*).

4.2.1 Derajat Kontinuitas

Symbol C^m adalah digunakan untuk mendeskripsikan kondisi kontinuitas. Kondisi C^m akan kontinu jika derivatif tergantung dan termasuk didalamnya derajat m adalah kontinu antar-elemen.

Gambar 4.3 Fungsi ϕ_1 maka C^0 kontinu dan ϕ_2 maka C^1 kontinu [3].

Pada kondisi struktur satu dimensi, $\Phi = \Phi(x)$ maka C^0 kontinu jika Φ kontinu tetapi $\Phi_{,x}$ tidak, dan $\Phi = \Phi(x)$ maka C^1 kontinu jika Φ dan $\Phi_{,x}$ kontinu tetapi $\Phi_{,xx}$ tidak. Ilustrasi kedua kasus tersebut selengkapnya dijelaskan melalui Gambar 4.3, dimana $x = a$ menunjukkan batas antar-elemen. Terminology C^m ini dapat diaplikasikan pada berbagai tipe elemen.

4.2.2 Interpolasi C^0

Interpolasi linier antara titik-titik (x_1, Φ_1) dan (x_2, Φ_2) , dimana $[X] = [1 \ x]$ adalah telah dijelaskan pada Persamaan 4.18a. maka diperoleh,

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad \text{dimana} \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Dengan meng-invers matriks $[A]$ maka diperoleh,

$$[A]^{-1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21a)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

Dua bentuk fungsi linier N_1 dan N_2 dijelaskan secara detail pada Gambar 4.4. Ini adalah contoh interpolasi paling sederhana dalam analisis elemen hingga. Properti formulasi dari elemen dua titik nodal dengan panjang L , digunakan $x_1 = 0$, $x_2 = L$, dan d.o.f titik nodal Φ_1 dan Φ_2 .

(a). Interpolasi linier.

(b). Interpolasi kuadrat.

Gambar 4.4 Interpolasi linier dan interpolasi kuadrat [3].

Interpolasi kuadratik berbentuk parabola dari titik-titik (x_1, Φ_1) , (x_2, Φ_2) , dan (x_3, Φ_3) . Jarak antar titik tersebut tidak harus sama. Apabila $[X] = [1 \ x \ x^2]$, maka Persamaan 4.19a menjadi sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{dimana } [A] = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Gambar 4.4 dapat dianggap sebagai contoh tertentu dari formula interpolasi *Lagrange*,

$$N_1 = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x) \dots (x_n - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)} \quad (4.23a)$$

$$N_2 = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x) \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2)} \quad (4.23b)$$

dalam bentuk umum,

$$N_k = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x) \dots (x_3 - x) \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_k)(x_3 - x_k) \dots (x_k - x_k) \dots (x_n - x_k)} \quad (4.23c)$$

Pembahasan lebih lanjut materi ini dapat dibaca pada buku *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* [3].

4.2.3 Interpolasi C^1

Untuk kurva kubik $\Phi = \Phi(x)$ bentuknya ditentukan oleh empat item data. Sebagai contoh diambil item dengan ordinat Φ_i dan potongan kecil $(d\Phi/dx)_i$ pada masing-masing ujung suatu garis dengan panjang L (Gambar 4.5).

$$[X] = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \quad (4.24a)$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_{,x1} \\ \phi_2 \\ \phi_{,x2} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{dimana } [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (4.24b)$$

Empat bentuk fungsi yang diperoleh dari Persamaan 4.19b menghasilkan empat bentuk fungsi dan persamaan seperti terlihat pada Gambar 4.5 sebagai berikut,

Gambar 4.5 Bentuk fungsi kurva kubik [3].

4.3 Persamaan untuk Matriks Elemen

Prinsip dari kerja virtual, atau disebut pula peralihan virtual, dapat dituliskan dari persamaan sebagai berikut,

$$\int \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = \int \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\Phi\} dS \quad (4.25)$$

$\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}$ adalah vektor regangan yang diperoleh dari Persamaan 4.11 dan peralihan virtual $\{\delta \mathbf{u}\}$ dimana $\{\delta \mathbf{u}\} = [\delta u \quad \delta v \quad \delta w]^T$. Simbol δ artinya sama dengan d untuk diferensial, tetapi simbol δ digunakan untuk konteks ketika peralihan adalah virtual.

Apabila peralihan $\{\mathbf{u}\}$ diinterpolasikan seperti halnya Persamaan 4.19, maka,

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{d}\} \quad \text{dimana } \{\mathbf{u}\} = [u \quad v \quad w]^T \quad (4.26)$$

dan $\{\mathbf{d}\}$ berisi derajat kebebasan (d.o.f) peralihan titik nodal dari elemen. Selanjutnya regangan dihitung dari peralihan yaitu sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\partial] \{\mathbf{u}\} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} \quad \text{dimana } [\mathbf{B}] = [\partial] [\mathbf{N}] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Matrik $[\mathbf{B}]$ disebut matrik peralihan-regangan.

$$\{\delta \mathbf{u}\} = \{\delta \mathbf{d}\}^T [\mathbf{N}]^T \quad (4.28a)$$

$$\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\delta \mathbf{d}\}^T [\mathbf{B}]^T \quad (4.28b)$$

Persamaan umum hubungan tegangan-regangan, dengan memasukkan remangan inisial dan regangan inisial dapat ditulis dalam persamaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \{\delta \mathbf{d}\}^T \left(\int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \{\mathbf{d}\} - \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_o\} dV + \int [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_o\} dV \right. \\ \left. - \int [\mathbf{N}]^T [\mathbf{F}] dV + \int [\mathbf{N}]^T \{\Phi\} dS \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vektor $\{\delta \mathbf{d}\}$ dan $\{\mathbf{d}\}$ tidak muncul dalam persamaan integral tersebut dikarenakan kedua vektor tersebut bukan merupakan fungsi dari koordinat. Maka,

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}_e\} \quad (4.30)$$

dimana matrik kekakuan elemen adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \quad (4.31)$$

Apabila vektor beban diaplikasikan pada titik nodal struktur oleh elemen, maka,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{r}_e\} = \int [\mathbf{N}]^T [\mathbf{F}] dV + \int [\mathbf{N}]^T \{\Phi\} dS + \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_o\} dV \\ + \int [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_o\} dV \end{aligned} \quad (4.32)$$

Persamaan 4.32 menunjukkan beban nodal konsisten [3].

4.3.1 Elemen Batang

Untuk elemen batang (ilustrasi selengkapnya ditampilkan pada Gambar 4.6), apabila di-set nilai $x_1 = 0$ dan $x_2 = L$. Peralihan aksial adalah merupakan interpolasi linier dari titik nodal derajat kebebasan u_1 sampai dengan u_2 . Persamaan bentuk fungsi dan matrik hubungan peralihan-regangan adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (4.33a)$$

$$[\mathbf{B}] = \frac{d}{dx} [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4.33b)$$

Dimana nilai E dan A merupakan konstanta, maka Persamaan 4.31 menghasilkan persamaan matrik kekakuan elemen, yaitu sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] A dx = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Selanjutnya, Persamaan 4.32 apabila ditulis dalam bentuk lain, dimana $\{\Phi\} dS$ menjadi gaya P dan $[\mathbf{N}]$ dievaluasi pada titik $x = L/3$, kemudian terdapat

tegangan inisial σ_o akibat adanya perubahan temperatur (perubahannya seragam) T , sebagai berikut,

$$\{\mathbf{r}_e\} = [\mathbf{N}_{L/3}]^T P - \int_0^L [\mathbf{B}]^T (-E\alpha T) A dx = \begin{Bmatrix} 2P/3 \\ P/3 \end{Bmatrix} + EA\alpha T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

dimana tegangan inisial adalah sebagai berikut,

$$\sigma_o = -E.\varepsilon_o = -E\left(\frac{\Delta L}{L}\right) \quad (4.36)$$

Gambar 4.6 Elemen batang dengan beban terpusat [3].

4.3.2 Elemen Balok

Contoh lain yang sederhana mengenai elemen balok tanpa deformasi geser (deformasi geser diabaikan) adalah dijabarkan dalam persamaan-persamaan sebagai berikut,

$$M = EI_z \kappa \quad (4.37a)$$

$$\kappa = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4.37b)$$

$$v = [\mathbf{N}] \{\mathbf{d}\} \quad (4.37c)$$

$$\kappa = [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} \quad (4.37d)$$

dimana $v = v(x)$ adalah peralihan arah lateral dan derajat kebebasan titik nodal adalah sebagai berikut,

$$\{\mathbf{d}\} = [v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2}]^T \quad (4.38)$$

Maka persamaan bentuk fungsi $[\mathbf{B}]$ menjadi sebagai berikut,

$$[\mathbf{B}] = \frac{d^2}{dx^2} [\mathbf{N}] = \left[\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{-2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \quad (4.39a)$$

Dengan nilai E dan I_z adalah konstanta, maka selanjutnya persamaan matrik kekakuan elemen dapat ditulis dalam persamaan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T EI_z [\mathbf{B}] dx = \frac{EI_x}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.39b)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan beban-beban pada titik nodal akibat beban merata (ilustrasi selengkapnya ditampilkan pada Gambar 4.7, digunakan integrasi kedua dari Persamaan 4.32, dimana $\{\Phi\}dS$ adalah beban merata q dan $dS = dx$, kemudian tegangan inisial $\{\sigma_0\}$ ditulis sebagai m_0 dan dV ditulis sebagai dx . Dalam studi kasus ini balok mempunyai bentuk potongan penampang dengan tinggi $2c$, temperatur bervariasi secara linier dari $-T$ di permukaan atas balok sampai dengan T di permukaan bawah balok.

Gambar 4.7 Elemen balok (*beam*) dengan beban merata [3].

Persamaan yang dihasilkan adalah sebagai berikut,

$$m_0 = -EI_z \kappa_0 \quad (4.40a)$$

$$\kappa_0 = \frac{\alpha T}{c} \quad (4.40b)$$

$$\{\mathbf{r}_e\} = \frac{EI_x \alpha T}{c} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T \quad (4.40c)$$

4.4 Elemen Segitiga Linier (CST)

Elemen segitiga linier adalah elemen bidang dengan tiga titik nodal, dimana besarnya bervariasi secara linier pada koordinat kartesian sumbu x dan y . dalam analisis tegangan, lingkup peralihan linier yang dihasilkan berada pada lingkup regangan konstan, sehingga elemen ini disebut pula elemen CST atau

constant-strain-triangle. Dalam tinjauan derajat kebebasan umum, nilai ϕ ditulis dalam persamaan sebagai berikut,

$$\phi = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Gambar 4.8 memperlihatkan elemen segitiga linier dengan tiga titik nodal.

Dengan memberikan nilai $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$, maka diperoleh persamaan berikut,

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (4.42a)$$

dimana,

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (4.42b)$$

Dengan eliminasi Gauss, maka diperoleh persamaan-persamaan berikut,

$$a_1 = \phi_1 \quad (4.43a)$$

$$a_2 = \frac{\phi_2 - \phi_1}{x_2} \quad (4.43b)$$

$$a_3 = \frac{(x_3 - x_2)\phi_1}{x_2 y_3} - \frac{x_3 \phi_2}{x_2 y_3} + \frac{\phi_3}{y_3} \quad (4.43c)$$

dengan melakukan interpolasi terhadap $\phi = [\mathbf{N}]\{\mathbf{d}\}$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$\phi = \underbrace{[1 \quad x \quad y]}_{[\mathbf{N}]} [\mathbf{A}]^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.44a)$$

dimana,

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{x_2} & \frac{1}{x_2} & 0 \\ \frac{x_3 - x_2}{x_2 y_3} & \frac{-x_3}{x_2 y_3} & \frac{1}{y_3} \end{bmatrix} \quad (4.44b)$$

Gradien,

$$\begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.45a)$$

dimana,

$$[\mathbf{B}] = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} [\mathbf{N}] \quad (4.45b)$$

Untuk elemen seperti terlihat pada Gambar 4.8 Persamaan 4.45b menjadi sebagai berikut,

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{x_2} & \frac{1}{x_2} & 0 \\ \frac{x_3 - x_2}{x_2 y_3} & \frac{-x_3}{x_2 y_3} & \frac{1}{y_3} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Untuk studi kasus lain, sebagai contoh dimana berhubungan dengan analisis panas konduksi, maka notasi ϕ menyatakan temperatura, sehingga persamaan matrik conductivitas (persamaan elemen),

$$[\mathbf{k}] = \int [\mathbf{B}]^T [\boldsymbol{\kappa}] [\mathbf{B}] t dA \quad (4.47)$$

Dimana $[\boldsymbol{\kappa}]$ adalah matrik konduktivitas material, t adalah tebal elemen, A adalah luas area segitiga elemen tersebut.

Gambar 4.8 Elemen segitiga linier tiga titik nodal [3].

Analisis Tegangan Elemen Segitiga (CST)

Interpolasi Persamaan 4.41 apabila diaplikasikan terhadap komponen peralihan u dan v , maka diperlukan enam derajat kebebasan sebagai berikut,

$$u = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (4.48a)$$

$$v = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.48b)$$

Oleh karena fungsi peralihan adalah linier terhadap sumbu x dan sumbu dan sumbu y , maka semua garis pada elemen, termasuk sisi-sisinya, adalah berupa garis lurus walaupun setelah mengalami deformasi. Regangan elemen adalah konstan, maka,

$$\varepsilon_x = a_2 \quad (4.49a)$$

$$\varepsilon_y = a_6 \quad (4.49b)$$

$$\gamma_{xy} = a_3 + a_5 \quad (4.49c)$$

Matrik peralihan-regangan [**B**] dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan 4.41 sampai dengan Persamaan 4.46. Selanjutnya dapat diperoleh persamaan umum untuk elemen segitiga tiga titik nodal linier (CST) sebagai berikut,

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{x_2} & 0 & \frac{1}{x_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_3 - x_2}{x_2 y_3} & 0 & \frac{-x_3}{x_2 y_3} & 0 & \frac{1}{y_3} \\ \frac{x_3 - x_2}{x_2 y_3} & \frac{-1}{x_2} & \frac{-x_3}{x_2 y_3} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{x_2} & 0 & \frac{1}{x_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_3 - x_2}{x_2 y_3} & 0 & \frac{-x_3}{x_2 y_3} & 0 & \frac{1}{y_3} \\ \frac{x_3 - x_2}{x_2 y_3} & \frac{-1}{x_2} & \frac{-x_3}{x_2 y_3} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{y_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4.50b)$$

Apabila tebal elemen t dan matrik konstitutif $[E]$ bernilai konstan, maka dengan menggunakan Persamaan 4.31 dapat ditulis persamaan umum matrik $[k]$ sebagai berikut,

$$[k] = [B]^T [E][B]tA \quad (4.51)$$

dimana,

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

4.5 Elemen Segiempat Bilinier (Q4)

Elemen segiempat bilinier adalah elemen bidang dengan 4 (empat) titik nodal, dan mempunyai 8 (delapan) derajat kebebasan. Persamaan umum yang digunakan adalah sebagai berikut,

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (4.53a)$$

$$v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (4.53b)$$

$$\varepsilon_x = a_2 + a_4y \quad (4.53c)$$

$$\varepsilon_y = a_7 + a_8x \quad (4.53d)$$

$$\gamma_{xy} = (a_3 + a_6) + a_4x + a_8y \quad (4.53e)$$

Bentuk fungsi dapat diperoleh dengan cara analog yang sama seperti pembahasan elemen segitiga linier (CST) pada subbab sebelumnya, namun dalam dalam elemen segiempat bilinier ini digunakan formula interpolasi *lagrange*. Dimana pada arah sumbu x disebut peralihan u , maka dapat dihitung sebagai berikut,

$$u_{12} = \frac{a-x}{2a} u_1 + \frac{a+x}{2a} u_2 \quad (4.54a)$$

$$u_{43} = \frac{a-x}{2a} u_4 + \frac{a+x}{2a} u_3 \quad (4.54b)$$

Selanjutnya diinterpolasikan secara linier pada sumbu y ,

$$u = \frac{b-y}{2b} u_{12} + \frac{b+y}{2b} u_{43} \quad (4.55)$$

Dengan prinsip substitusi Persamaan 4.5a, Persamaan 4.5b, dan Persamaan 4.55 selanjutnya dapat diperoleh bentuk fungsi (*shape function*) untuk elemen segiempat bilinier empat titik nodal (Q4) sebagai berikut,

$$u = \sum N_i u_i \quad (4.56)$$

dimana,

$$N_1 = \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \quad (4.57a)$$

$$N_2 = \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \quad (4.57b)$$

$$N_3 = \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \quad (4.57c)$$

$$N_4 = \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \quad (4.57d)$$

Gambar 4.9 Elemen segiempat bilinear empat titik nodal (Q4) dengan 8 (delapan) derajat kebebasan [3].

Elemen ini disebut bilinear karena bentuk fungsi merupakan produk dari polinomial linier satu dimensi. N_i memuat hanya satu kuadratik, yaitu xy . Bentuk lengkap persamaan peralihan elemen dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

Regangan-regangan elemen dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} \quad (4.59)$$

Selanjutnya matrik $[\mathbf{B}]$ dapat dihitung sebagai berikut,

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & (b-y) & 0 & (b+y) & 0 & -(b+y) & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -(a+x) & 0 & (a+x) & 0 & (a-x) \\ -(a-x) & -(b-y) & -(a+x) & (b-y) & (a+x) & (b+y) & (a-x) & -(b+y) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Selanjutnya matrik kekakuan elemen segiempat bilinear (Q4) dapat ditulis sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}]_{8 \times 8} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a [\mathbf{B}]_{8 \times 3}^T [\mathbf{E}]_{3 \times 3} [\mathbf{B}]_{3 \times 8} t \, dx \, dy \quad (4.61)$$

dimana t adalah tebal elemen.

Gambar 4.10 Ragam deformasi elemen segiempat bilinear Q4 [3].

Gambar 4.11 Kantilever yang dimodelkan dengan elemen Q4 [3].

4.6 Referensi

1. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.
2. Computer and Structures, Inc. 2005. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
3. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
4. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.

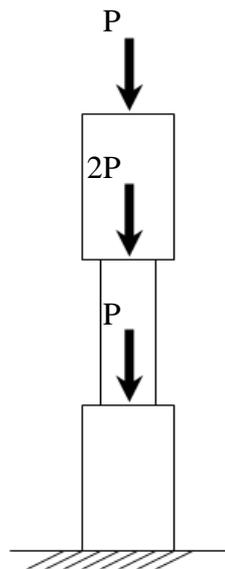
BAB 5

LATIHAN SOAL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas beberapa latihan soal elemen batang, elemen balok, elemen segitiga linier CST, dan elemen segiempat bilinear Q4. Untuk menunjang kelancaran dalam memahami elemen-elemen tersebut, hasil perhitungan diverifikasi dengan perangkat lunak SAP2000 [1].

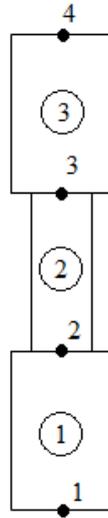
5.1 Elemen Batang

Diketahui struktur batang seperti terlihat pada Gambar 5.1. Elemen 1 mempunyai ukuran penampang persegi 300mm x 300 mm. Elemen 2 mempunyai ukuran penampang persegi 200mm x 200 mm. Elemen 3 mempunyai ukuran penampang persegi 300mm x 300 mm. Batang terbuat dari baja dengan modulus elastisitas 200000 MPa. Panjang masing-masing elemen 1 meter. Besar beban P adalah 500 kg. Hitunglah deformasi yang terjadi pada struktur batang tersebut.



Gambar 5.1 Struktur batang dengan beberapa beban terpusat.

Terdapat tiga elemen batang, dengan masing-masing batang mempunyai dua titik nodal. Penomoran elemen dan titik nodal sebagai berikut,



Gambar 5.2 Penomoran elemen dan titik nodal.

Selanjutnya penyelesaian sebagai berikut, pertama-tama adalah merakit matrik kekakuan masing-masing elemen dan matrik kekakuan gabungan.

elemen 1.

$$\begin{pmatrix} \frac{A1 \cdot E}{L} & -\frac{A1 \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{A1 \cdot E}{L} & \frac{A1 \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemen 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A2 \cdot E}{L} & -\frac{A2 \cdot E}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{A2 \cdot E}{L} & \frac{A2 \cdot E}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemen 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A3 \cdot E}{L} & -\frac{A3 \cdot E}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{A3 \cdot E}{L} & \frac{A3 \cdot E}{L} \end{pmatrix}$$

elemen gabungan.

$$\begin{pmatrix} \frac{A1 \cdot E}{L} & -\frac{A1 \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{A1 \cdot E}{L} & \frac{A1 \cdot E}{L} + \frac{A2 \cdot E}{L} & -\frac{A2 \cdot E}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{A2 \cdot E}{L} & \frac{A2 \cdot E}{L} + \frac{A3 \cdot E}{L} & -\frac{A3 \cdot E}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{A3 \cdot E}{L} & \frac{A3 \cdot E}{L} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya apabila diterapkan syarat batas, maka $u_1 = 0$, maka penyelesaian sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] \cdot \{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{k}]^{-1} \cdot \{\mathbf{r}\}$$

Matrik elemen gabungan dapat direduksi menjadi berukuran 3x3 dikarenakan $u_1 = 0$, yaitu menjadi sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} \frac{A1 \cdot E}{L} + \frac{A2 \cdot E}{L} & -\frac{A2 \cdot E}{L} & 0 \\ -\frac{A2 \cdot E}{L} & \frac{A2 \cdot E}{L} + \frac{A3 \cdot E}{L} & -\frac{A3 \cdot E}{L} \\ 0 & -\frac{A3 \cdot E}{L} & \frac{A3 \cdot E}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 2P \\ P \end{pmatrix}$$

maka selanjutnya dapat dihitung u_1 , u_2 , dan u_3 sebagai berikut,

$$A1 := 300 \cdot 300 \quad \text{mm}^2$$

$$A2 := 200 \cdot 200 \quad \text{mm}^2$$

$$A3 := 300 \cdot 300 \quad \text{mm}^2$$

$$E := 200000.0 \quad \text{MPa}$$

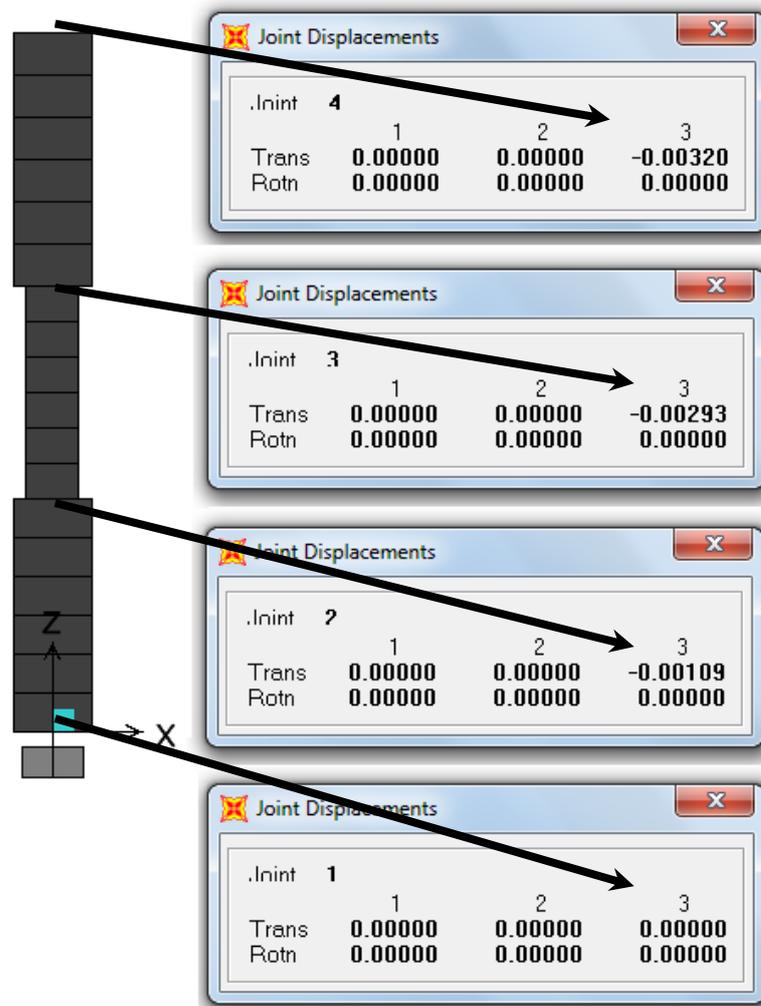
$$L := 1000 \quad \text{mm}$$

$$P := 500 \cdot 9.81 \quad \text{N}$$

maka dapat dihitung u_2 , u_3 , dan u_4 sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} \frac{A1 \cdot E}{L} + \frac{A2 \cdot E}{L} & -\frac{A2 \cdot E}{L} & 0 \\ -\frac{A2 \cdot E}{L} & \frac{A2 \cdot E}{L} + \frac{A3 \cdot E}{L} & -\frac{A3 \cdot E}{L} \\ 0 & -\frac{A3 \cdot E}{L} & \frac{A3 \cdot E}{L} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 2P \\ P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.00109 \\ 0.002929375 \\ 0.003201875 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \end{matrix}$$

Selanjutnya, hasil tersebut diverifikasi dengan menggunakan perangkat lunak SAP2000. Salah satu hal penting dalam pemodelan numerik adalah input data harus tepat, dalam hal ini nilai modulus elastisitas (E) adalah 200000 MPa, berat sendiri elemen diabaikan, dan nilai rasio poisson nol. Hasil analisis selengkapnya ditampilkan pada Gambar 5.3, dimana hasil perhitungan dengan SAP2000 sama dengan hasil perhitungan sebelumnya.



Gambar 5.3 Hasil analisis, deformasi pada masing-masing titik nodal.

Kesimpulan yang dapat diperoleh ditampilkan dalam Tabel 5.1 sebagai berikut,

Tabel 5.1 Hasil perhitungan.

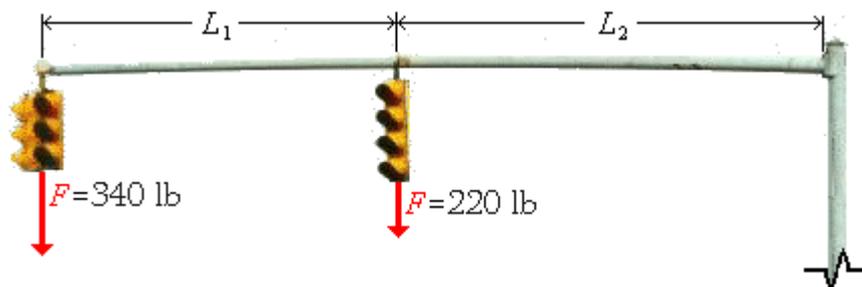
Deformasi (mm)	Perhitungan manual	Hasil SAP2000
u_1	0	0
u_2	0,00109	0,00109
u_3	0,00293	0,00293
u_4	0,00320	0,00320

5.2 Elemen Balok

Diketahui struktur portal dengan tumpuan jepit seperti terlihat pada Gambar 5.4. Struktur berfungsi untuk menahan dua buah beban terpusat berupa lampu lalu lintas.

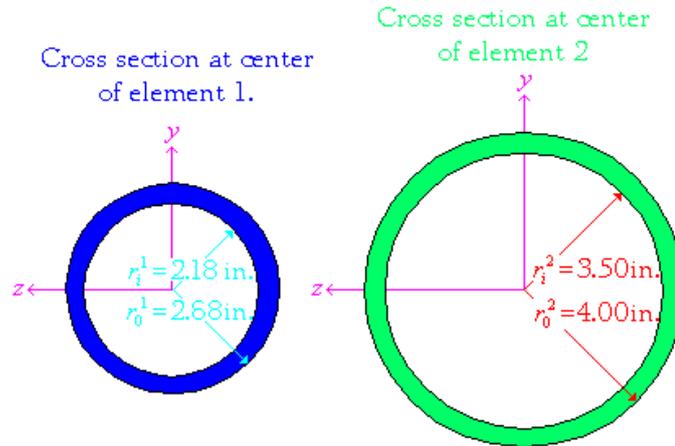


Gambar 5.4 Struktur portal dengan pipa baja [5].



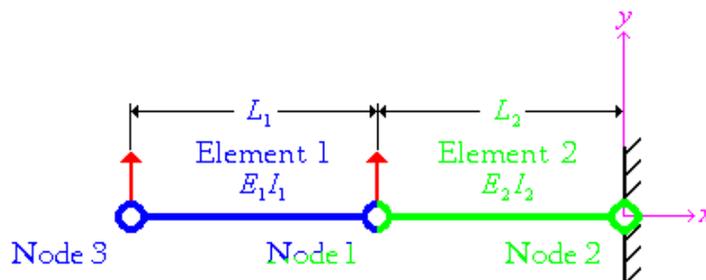
Gambar 5.5 Idealisasi model struktur [5].

Balok dengan panjang $L_1 = 2438,4$ mm (96 inch) menggunakan pipa dengan diameter luar 136,144 mm (2,68 inch) dan tebal pipa 12,7 mm (0,6 inch). Balok dengan panjang $L_2 = 2946,4$ mm (116 inch) menggunakan pipa dengan diameter luar 203,2 mm (4,00 inch) dan tebal pipa 12,7 mm (0,5 inch). Balok terbuat dari baja dengan modulus elastisitas sebesar 200000 MPa. Beban yang bekerja seperti terlihat pada Gambar 5.5, yaitu sebesar 340 lb (1512,4 N) dan 220 lb (978,61 N).

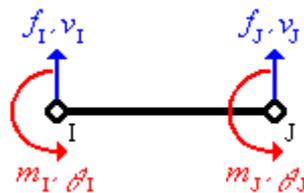


Gambar 5.6 Dimensi dan ukuran penampang balok yang digunakan [3].

Selanjutnya, untuk mengetahui besarnya deformasi yang terjadi akibat adanya beban-beban tersebut, maka struktur balok dimodelkan menjadi dua elemen seperti terlihat pada Gambar 5.7. Dengan model tersebut, maka dapat dihitung besarnya deformasi pada titik nodal 3 dan titik nodal 1. Titik nodal 2 diasumsikan sebagai tumpuan jepit, sehingga tidak terjadi deformasi.



Gambar 5.7 Pemodelan dan idealisasi elemen [3].



Gambar 5.8 Derajat kebebasan elemen balok [3].

Tahap selanjutnya adalah menentukan matrik kekakuan elemen untuk tiap-tiap elemen. Setelah itu merakit matrik kekakuan struktur (gabungan). Tahap selanjutnya atau tahap terakhir adalah menentukan syarat batas dan menentukan peralihan dan rotasi yang terjadi pada masing-masing titik nodal. Perhitungan selengkapnya sebagai berikut,

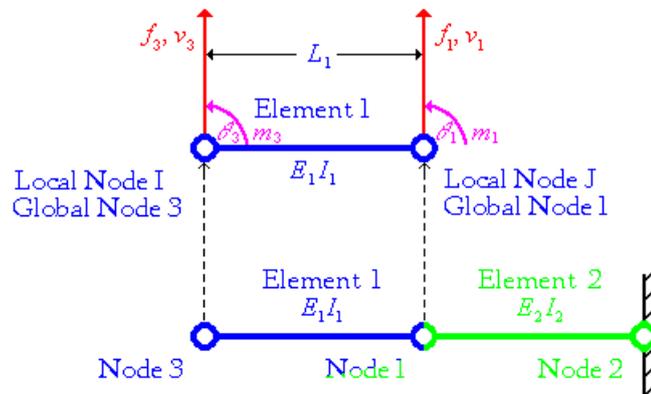
Langkah pertama, menentukan matrik kekakuan elemen masing-masing elemen, tiap elemen mempunyai empat titik nodal (Gambar 5.8),

$$\begin{matrix} \begin{Bmatrix} f_I \\ m_I \\ f_J \\ m_J \end{Bmatrix} \\ 4 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \\ 4 \times 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{Bmatrix} v_I \\ \theta_I \\ v_J \\ \theta_J \end{Bmatrix} \\ 4 \times 1 \end{matrix}$$

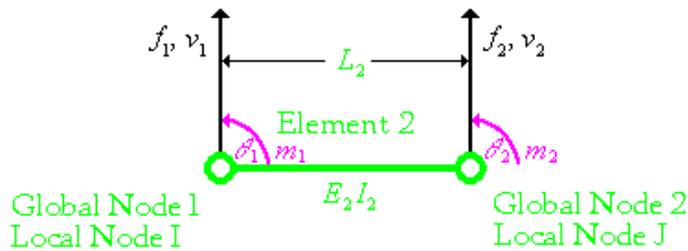
$$\begin{matrix} \begin{Bmatrix} f_I \\ m_I \\ f_J \\ m_J \end{Bmatrix} \\ 4 \times 1 \end{matrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \\ 4 \times 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{Bmatrix} v_I \\ \theta_I \\ v_J \\ \theta_J \end{Bmatrix} \\ 4 \times 1 \end{matrix}$$

Matrik kekakuan elemen (umum),

$$\underline{K}_E = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



(a). Elemen 1.



(b). Elemen 2.

Gambar 5.9 Penomoran titik nodal Elemen 1 dan Elemen 2 [5].

Untuk elemen 1,

$$K_{1f} := \frac{E \cdot I_1}{L_1^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L_1 & -12 & 6L_1 \\ 6L_1 & 4L_1^2 & -6L_1 & 2L_1^2 \\ -12 & -6L_1 & 12 & -6L_1 \\ 6L_1 & 2L_1^2 & -6L_1 & 4L_1^2 \end{pmatrix} \quad K_{1f} := \frac{E \cdot I_1}{L_1^3} \begin{pmatrix} 12 & -6L_1 & 0 & 0 & -12 & -6L_1 \\ -6L_1 & 4L_1^2 & 0 & 0 & 6L_1 & 2L_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6L_1 & 0 & 0 & 12 & 6L_1 \\ -6L_1 & 2L_1^2 & 0 & 0 & 6L_1 & 4L_1^2 \end{pmatrix}$$

Untuk elemen 2,

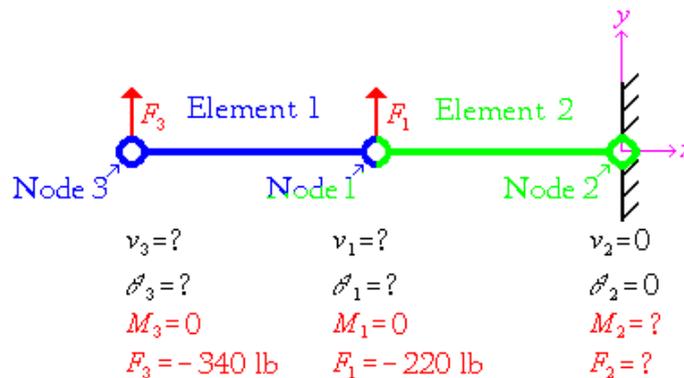
$$K_{2f} := \frac{E \cdot I_2}{L_2^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L_2 & -12 & 6L_2 \\ 6L_2 & 4L_2^2 & -6L_2 & 2L_2^2 \\ -12 & -6L_2 & 12 & -6L_2 \\ 6L_2 & 2L_2^2 & -6L_2 & 4L_2^2 \end{pmatrix} \quad K_{2f} := \frac{E \cdot I_2}{L_2^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L_2 & -12 & 6L_2 & 0 & 0 \\ 6L_2 & 4L_2^2 & -6L_2 & 2L_2^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L_2 & 12 & -6L_2 & 0 & 0 \\ 6L_2 & 2L_2^2 & -6L_2 & 4L_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrik kekakuan gabungan berukuran 6x6 (unit satuan N dan mm),

$$K = K_{1f} + K_{2f}$$

$$K := \begin{pmatrix} 4820.82 & 2.87e6 & -3250.76 & 4.78e6 & -1570.06 & -1.91e6 \\ 2.87e6 & 1.25e10 & -4.78e6 & 4.70e9 & 1.91e6 & 1.55e9 \\ -3250.76 & -4.78e6 & 3250.76 & -4.78e6 & 0 & 0 \\ 4.78e6 & 4.70e9 & -4.78e6 & 9.41e9 & 0 & 0 \\ -1570.06 & 1.91e6 & 0 & 0 & 1570.06 & 1.91e6 \\ -1.91e6 & 1.55e9 & 0 & 0 & 1.91e6 & 3.11e9 \end{pmatrix}$$

Menerapkan syarat batas, yaitu titik nodal 2 adalah dimodelkan jepit, sehingga tidak terjadi translasi vertikal maupun rotasi, maka v_2 dan θ_2 sama dengan nol.



Gambar 5.10 Syarat batas [5].

Langkah terakhir selanjutnya yaitu menghitung peralihan dan rotasi pada titik nodal 3 dan titik nodal 1 sebagai berikut,

$$[\mathbf{K}].\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{K}]^{-1}.\{\mathbf{r}\}$$

Matrik kekakuan gabungan dapat direduksi menjadi 4x4 dengan diterapkannya syarat batas, yaitu menjadi sebagai berikut,

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} 4820.82 & 2.87e6 & -1570.06 & -1.91e6 \\ 2.87e6 & 1.25e10 & 1.91e6 & 1.55e9 \\ -1570.06 & 1.91e6 & 1570.06 & 1.91e6 \\ -1.91e6 & 1.55e9 & 1.91e6 & 3.11e9 \end{pmatrix}$$

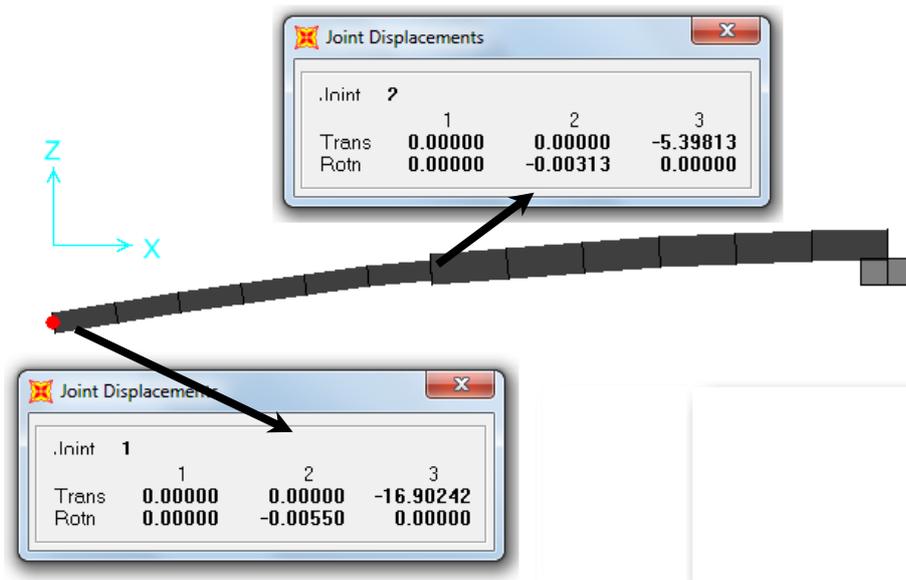
$$\mathbf{r} := \begin{pmatrix} -F1 \\ 0 \\ -F3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d} := \begin{pmatrix} v1 \\ \theta1 \\ v3 \\ \theta3 \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh translasi (satuan mm) dan rotasi (satuan radian) di titik nodal 1 dan titik nodal 3 sebagai berikut,

$$\mathbf{d} \rightarrow \begin{pmatrix} -5.2708121158119057377 \\ 0.003063417404518140313 \\ -16.472199058707342793 \\ 0.0053525247858286711543 \end{pmatrix}$$

Hasil perhitungan selanjutnya diverifikasi dengan menggunakan perangkat lunak SAP2000. Hasil analisis dengan SAP2000 ditampilkan pada Gambar 5.9. Kesimpulannya hasil perhitungan manual dengan SAP2000 adalah sama.



Gambar 5.9 Deformasi struktur hasil analisis SAP2000.

5.3 Elemen Segitiga Linier (CST)

5.4 Elemen Segiempat Bilinier (Q4)

5.5 Referensi

1. Computer and Structures, Inc. 2005. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
2. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
3. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.
4. Grandin, H. (1986). "Fundamentals of The Finite Element Method", Macmillan Publishing Company, New York, USA.
5. url: <http://comp.uark.edu/~jjrencis>, diakses tanggal 27 Januari 2012.

DAFTAR PUSTAKA

1. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.
2. Computer and Structures, Inc. 2005. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
3. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
4. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.
5. Grandin, H. (1986). "Fundamentals of The Finite Element Method", Macmillan Publishing Company, New York, USA.
6. url: http://www.abacom.de/products/abaqus_fea.html, diakses tanggal 26 November 2011.
7. url: <http://www.adina.com/index.shtml>, diakses tanggal 26 November 2011.
8. url: <http://www.ansys.com>, diakses tanggal 26 November 2011.
9. url: <http://www.csiberkeley.com/sap2000>, diakses tanggal 26 November 2011.
10. url: http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method, diakses tanggal 26 November 2011.
11. url: <http://preview.filesonic.com/img/c4/6d/ce/3475071.jpg>, diakses tanggal 26 November 2011.
12. url: http://web.srasgroup.com/wp-content/uploads/2010/11/car_impact.jpg, diakses tanggal 26 November 2011.
13. url: <http://www.infometrik.com/2009/08/pengantar-finite-element-method>, diakses tanggal 26 November 2011.
14. url: http://en.wikipedia.org/wiki/Strength_of_materials diakses tanggal 29 November 2011.
15. url: <http://comp.uark.edu/~jjrencis>, diakses tanggal 27 Januari 2012.